

第四章 线性系统的根轨迹法

第一节 根轨迹方程

一、根轨迹概念

根轨迹简称根迹，是开环系统某一参数从零变到无穷时，闭环系统特征方程的根在s平面上变化的轨迹。

例1：如图所示控制系统
其闭环传递函数为

$$\begin{aligned}\phi(s) &= \frac{\frac{K}{s(0.5s+1)}}{1 + \frac{K}{s(0.5s+1)}} \\ &= \frac{2K}{s^2 + 2s + 2K}\end{aligned}$$

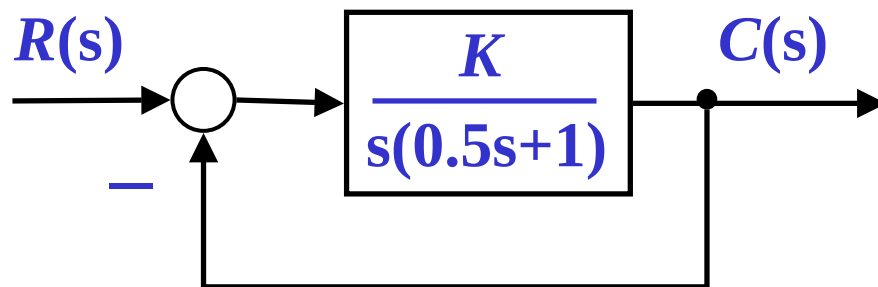


图4-1

所以，闭环系统特征方程为

$$D(s) = s^2 + 2s + 2K = 0$$

特征根为

$$s_1 = -1 + \sqrt{1 - 2K} \quad s_2 = -1 - \sqrt{1 - 2K}$$

当 $K : 0 \rightarrow \infty$

K	0	1/4	1/2	3/4	1	3/2	...	∞
s_1	0	-0.293	-1	$-1 + j0.707$	$-1 + j1$	$-1 + j1.414$		$-1 + j \infty$
s_2	-2	-1.707	-1	$-1 - j0.707$	$-1 - j1$	$-1 - j1.414$		$-1 - j \infty$

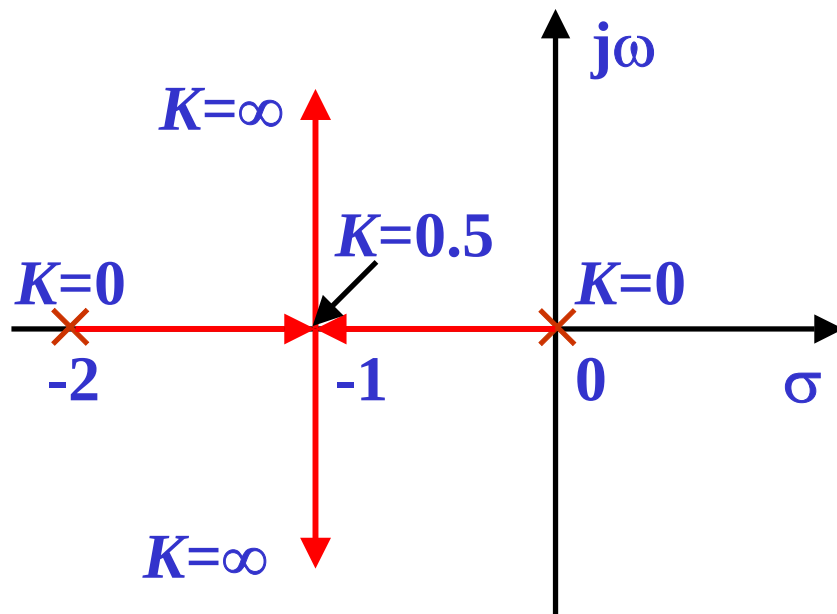


图4-2 例1的根轨迹图

二、根轨迹与系统性能

(以图4-2为例进行说明)

1、稳定性

当 K 从 $0 \rightarrow \infty$ 时，根轨迹在 s 平面左半平面，故系统稳定。

2、稳态性能

系统为I型系统

K 为静态速度误差系数

(若给定系统的稳态误差要求，可以确定闭环极点位置的容许范围)

3、动态性能

1) $0 < K < 0.5$ 两个不同的实极点，过阻尼系统。

2) $K = 0.5$ 两个相同的实极点，临界阻尼系统。

3) $K > 0.5$ 一对共轭复根，欠阻尼系统。

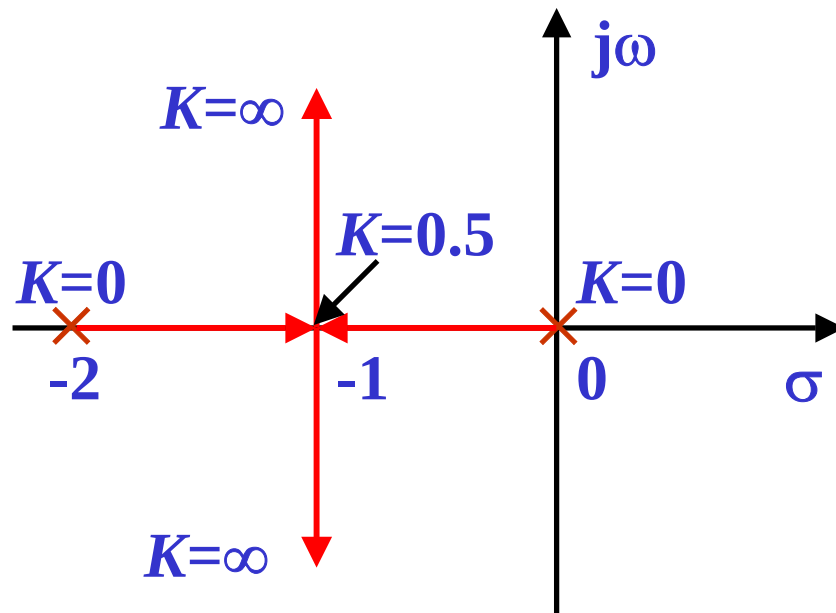


图4-2 例1的根轨迹图

三、闭环零、极点与开环零、极点的关系

闭环传递函数：

$$\phi(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

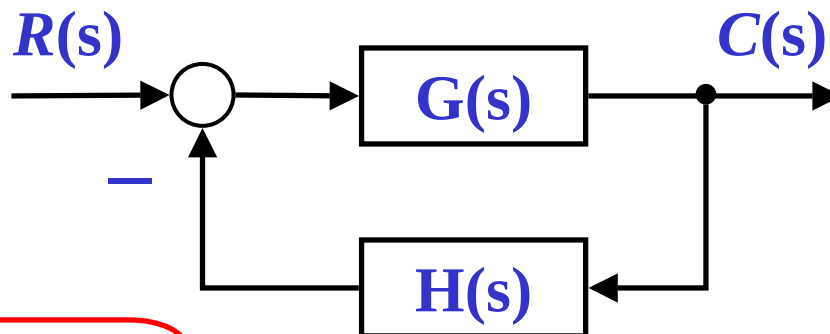


图4-3

前向通路
根轨迹增益

$$G(s) = \frac{k_G^* \prod_{i=1}^{m_1} (s - z_i)}{\prod_{j=1}^{n_1} (s - p_j)}$$

反馈通路
根轨迹增益

$$H(s) = \frac{k_H^* \prod_{i=1}^{m_2} (s - z_i)}{\prod_{j=1}^{n_2} (s - p_j)}$$

开环系统根轨迹增益

$$G(s)H(s) = \frac{k_G^* k_H^* \prod_{i=1}^{m_1+m_2} (s - z_i)}{\prod_{j=1}^{n_1+n_2} (s - p_j)} = \frac{k^* \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)}$$

$$\therefore \phi(s) = \frac{k_G^* \prod_{i=1}^{m_1} (s - z_i) \prod_{j=1}^{n_2} (s - p_j)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j) + k^* \prod_{i=1}^m (s - z_i)}$$

由此可见：

- 1) 闭环系统根轨迹增益等于开环系统前向通路根轨迹增益；
- 2) 闭环零点由前向通路零点和反馈通路极点组成；
- 3) 闭环极点与开环零、极点及根轨迹增益 k^* 有关。

四、根轨迹方程

闭环系统传递函数

$$\phi(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

闭环系统特征方程为：

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

$$\therefore G(s)H(s) = -1$$

得根轨迹方程：

$$\frac{k^* \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)} = -1$$

(注意, $k^* : 0 \rightarrow \infty$)

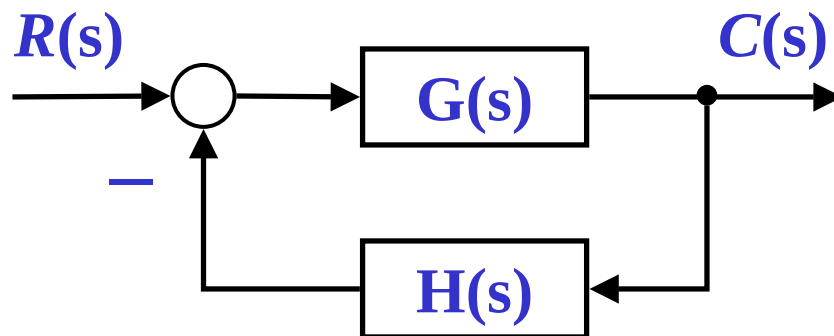


图4-3

$$\text{又} \because -1 = 1 \cdot e^{j(2k+1)\pi}$$

$$k^* = \frac{\prod_{j=1}^n |s - p_j|}{\prod_{i=1}^m |s - z_i|}$$

模值条件

相角条件

$$\sum_{i=1}^m \angle(s - z_i) - \sum_{j=1}^n \angle(s - p_j) = (2k + 1)\pi$$

第二节 根轨迹绘制的基本法则

一、常规根轨迹的绘制法则

常规根轨迹：

变化参数为开环系统根轨迹增益 k^* ，变化范围为 $0 \rightarrow \infty$ 。因所绘根轨迹的相角遵循 $180^\circ + 2k\pi$ 条件，所以，又称 180° 根轨迹。

1、法则1：根轨迹的起点和终点

根轨迹起于开环极点，终于开环零点。

起点： $k^*=0$ 的根轨迹点。

终点： $k^* \rightarrow \infty$ 的根轨迹点。

零点 { 有限零点
无限零点

极点 { 有限极点
无限极点

2、法则2：根轨迹的分支数和对称性

根轨迹的分支数 $=\max(m,n)$ ，根轨迹连续且对称于实轴。

3、法则3：根轨迹的接近线

当开环有限极点数 $n >$ 开环有限零点 m 时，有 $n-m$ 条根轨迹分支沿着与实轴交角为 φ_a 、交点为 σ_a 的一组接近线趋向无穷远处，且有

$$\varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{n-m} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-m-1)$$

$$\sigma_a = \frac{\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m}$$

例2：控制系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+5)}$$

试绘制其概略根轨迹。

解：由法则1知根轨迹的起点有3个， $p_1=0$ 、 $p_2=-1$ 、 $p_3=-5$ ；
终点为无穷远处。

由法则2知根轨迹有3条。

由法则3知根轨迹的接近线有3条。

$$\begin{aligned}\varphi_a &= \frac{(2k+1)\pi}{n-m} \quad (k=0,1,2) \\ &= \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}\end{aligned}$$

$$\sigma_a = \frac{\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m} = -2$$

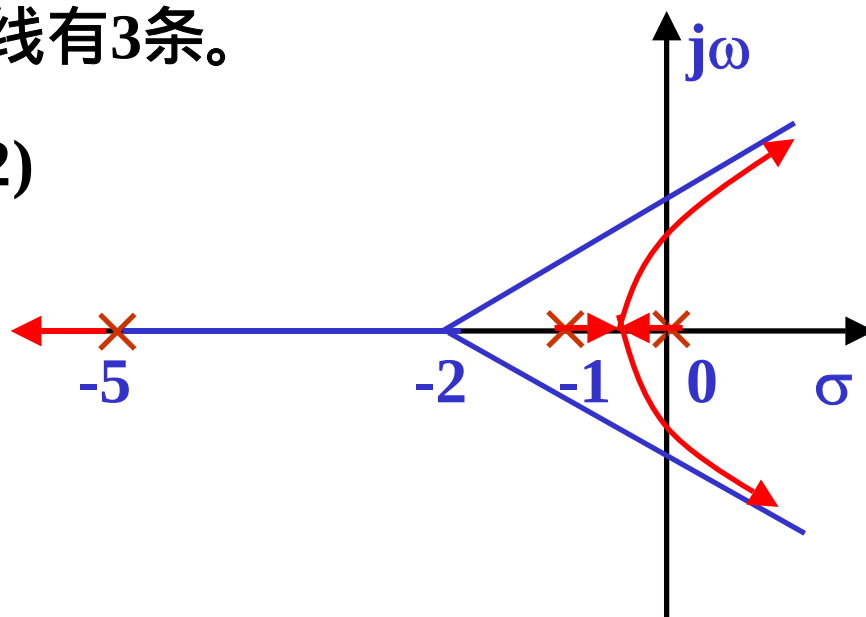


图4-4 例2的根轨迹图

4、法则4：实轴上的根轨迹

实轴上的某一区域，若其右边开环实数零极点个数之和为奇数，则该区域必是根轨迹。

5、法则5：根轨迹的分离点

分离点：两条或两条以上的根轨迹分支在 s 平面上相遇又立即分开的点。

分离点的坐标 d 是下列方程的解

$$\sum_{i=1}^m \frac{1}{d - z_i} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{d - p_j}$$

分离角：根轨迹进入分离点的切线方向与离开分离点的切线方向之间的夹角。

$$\text{分离角} = \frac{(2k + 1)\pi}{l} \quad (k = 0, 1, \dots, l - 1)$$

(l 为根轨迹分支进入并立即离开分离点的数目)

- 1) 常见的根轨迹分离点位于实轴上；
- 2) 如果根轨迹位于实轴上两个相邻开环极点之间（其中一个可以是无限极点），则在这两个极点之间至少存在一个分离点；零点之间亦如此。
- 3) 由两个极点和一个有限零点组成的开环系统，只要有限零点没有位于两个实数极点之间，则闭环根轨迹的复数部分，是以有限零点为圆心，以有限零点到分离点的距离为半径的一个圆或圆的一部分。

例3：控制系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K(0.5s + 1)}{0.5s^2 + s + 1}$$

试绘制其概略根轨迹。

解：

$$G(s) = \frac{K(0.5s + 1)}{0.5s^2 + s + 1} = \frac{K(s + 2)}{s^2 + 2s + 2} = \frac{K(s + 2)}{(s + 1 + j)(s + 1 - j)}$$

1) 根轨迹有2支，分别起于 $p_1 = -1 + j$ 、 $p_2 = -1 - j$ ，终于-2和无限零点。

2) 实轴上的根轨迹区间： $(-\infty, -2]$ ，在此区间上存在一分离点，其方程为

$$\frac{1}{d + 2} = \frac{1}{d + 1 + j} + \frac{1}{d + 1 - j}$$

求得合乎题意的 d 为： $d = -3.414$

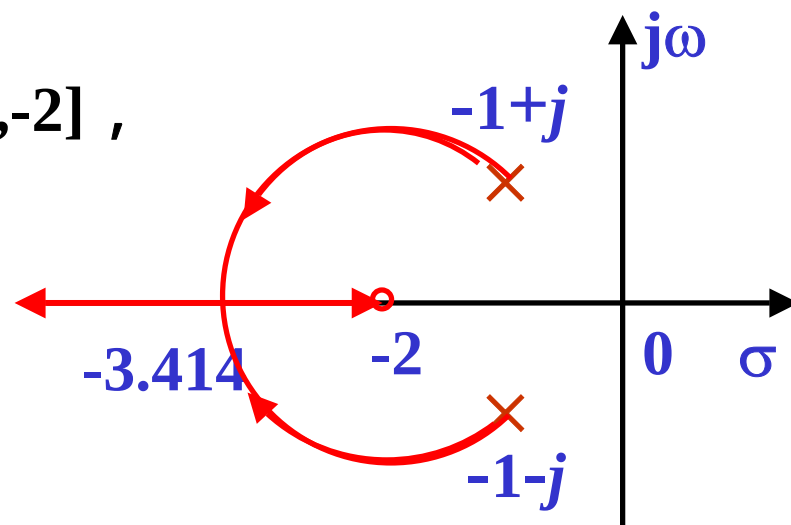


图4-5 例3的根轨迹图

6、法则6：根轨迹的起始角与终止角

起始角：根轨迹离开开环复数极点处的切线与正实轴的夹角。

终止角：根轨迹进入开环复数零点处的切线与正实轴的夹角。

起始角 θ_{p_i} $\theta_{p_i} = 180^\circ + \left(\sum_{j=1}^m \varphi_{z_j p_i} - \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^n \theta_{p_j p_i} \right)$

终止角 φ_{z_i} $\varphi_{z_i} = 180^\circ - \left(\sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^m \varphi_{z_j z_i} - \sum_{j=1}^n \theta_{p_j z_i} \right)$

(共轭极点的起始角大小相等，符号相反。
同样，共轭零点的终止角大小相等，符号相反。)

例4：某控制系统的开环传递函数的零极点分布如图所示，试绘制其概略根轨迹。

解：由图可知开环极点数 $n=3$ ，

开环零点数 $m=1$ ，

$\therefore$ 根轨迹分支数 $=\max(n,m)=3$

实轴上的根轨迹区间为： $[-2,0]$

根轨迹的接近线有2条：

$$\varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{n-m} = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

$$\sigma_a = \frac{\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m} = 0$$

$$\text{起始角 } \theta_{p2} : \vartheta_{p_2} = 180^\circ + 45^\circ - 135^\circ - 90^\circ = 0^\circ$$

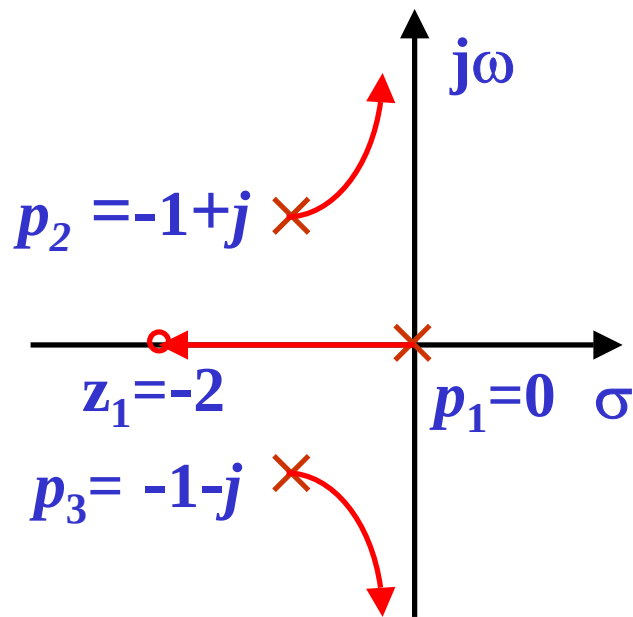


图4-6

7、法则7：根轨迹与虚轴的交点

若根轨迹与虚轴相交，则交点上的 k^* 值和 ω 值可用劳斯判据确定；也可令闭环特征方程中的 $s=j\omega$ ，然后分别令其实部和虚部为零而求得。

例5：设系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

画出其概略根轨迹，并确定使系统稳定的 K 值范围。

解：起点有3个， $p_1=0$ 、 $p_2=-1$ 、 $p_3=-2$ ；终点为无穷远处。

根轨迹有3条。

接近线有3条。

$$\varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{n-m} = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3} \quad \sigma_a = \frac{\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m} = -1$$

实轴上的根轨迹区间为： $(-\infty, -2]$, $[-1, 0]$

$[-1, 0]$ 间有一分离点，其方程为：

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d+1} + \frac{1}{d+2} = 0 \quad \text{求得合乎题意的} d \text{为：} d = -0.423$$

与虚轴的交点：（方法1）

特征方程： $D(s) = s(s+1)(s+2) + K = 0$

即： $D(s) = s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$

列劳斯表：

s^3	1	2
s^2	3	K
s^1	$2 - \frac{K}{3}$	
s^0	K	

由： $2 - \frac{K}{3} = 0$

求得： $K = 6$

由辅助方程： $3s^2 + K = 0$

求得： $s = \pm j\sqrt{2}$

稳定范围： $0 < K < 6$

与虚轴的交点：（方法2）

特征方程： $D(s) = s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$

令： $s = j\omega$ 得 $-j\omega^3 - 3\omega^2 + j2\omega + K = 0$

$$\begin{cases} 2\omega - \omega^3 = 0 \\ K - 3\omega^2 = 0 \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \omega = \pm\sqrt{2} \\ K = 6 \end{cases}$$

$\therefore$ 与虚轴交点： $s = \pm j\sqrt{2}$ 稳定范围： $0 < K < 6$

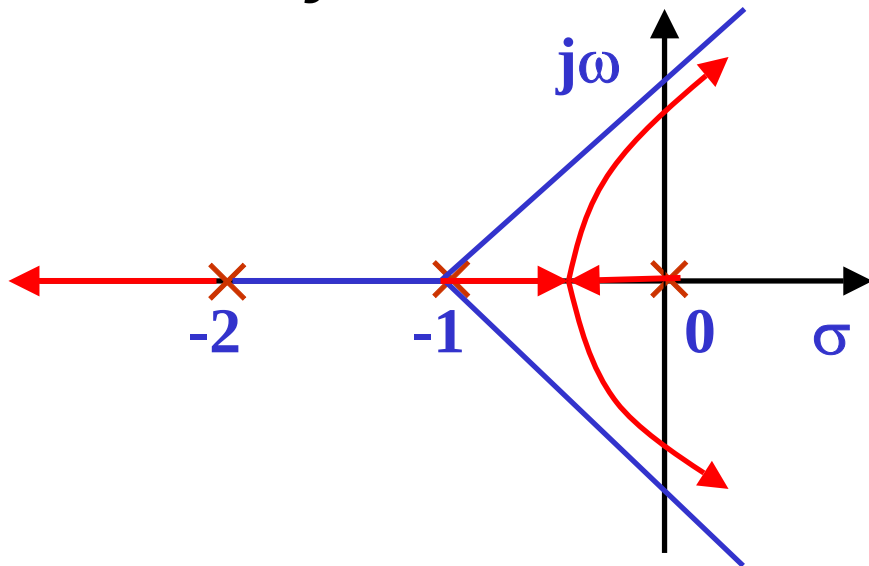


图4-7 例5的根轨迹图

8、法则8：根之和

若 $n-m \geq 2$ ，则开环 n 个极点之和总是等于闭环特征方程 n 个根之和。

$$\sum_{i=1}^n s_i = \sum_{i=1}^n p_i$$

这里 p_i 为开环极点， s_i 为闭环特征方程的根。

二、闭环极点的确定

对于确定的 k^* 值下的闭环极点，可用模值条件确定。

实用方法：用试探法确定实数闭环极点的数值，然后用综合除法得到其余的闭环极点。

例6：设系统开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{k^*}{s(s+3)(s^2+2s+2)}$$

试求 $k^*=4$ 的闭环极点。

解：模值条件

$$k^* = \frac{\prod_{i=1}^n |s - p_i|}{\prod_{j=1}^m |s - z_j|}$$

$$k^* = \prod_{i=1}^4 |s - p_i| = 4$$

$$|s - 0| \cdot |s + 3| \cdot |s + 1 - j| \cdot |s + 1 + j| = 4$$

在 $[-3, 0]$ 间试探得： $s_1 = -2$, $s_2 = -2.52$

特征方程： $s^4 + 5s^3 + 8s^2 + 6s + k^* = 0$

将： $k^* = 4$ ， $s_1 = -2$ ， $s_2 = -2.52$ 代入特征方程，得

$$s^4 + 5s^3 + 8s^2 + 6s + 4 = (s + 2)(s + 2.52)(s - s_3)(s - s_4) = 0$$

因为，
$$\frac{s^4 + 5s^3 + 8s^2 + 6s + 4}{(s + 2)(s + 2.52)} = s^2 + 0.48s + 0.78$$
$$= (s - s_3)(s - s_4)$$

所以求解方程： $s^2 + 0.48s + 0.78 = 0$

求得

$$s_3 \approx -0.24 + j0.86$$

$$s_4 \approx -0.24 - j0.86$$

第三节 广义根轨迹

一、零度根轨迹

1、应用场合：正反馈、非最小相位系统

非最小相位系统：在s右半平面有开环零极点的控制系统。

2、与常规根轨迹的比较

$$\begin{aligned}\phi(s) &= \frac{C(s)}{R(s)} \\ &= \frac{G(s)}{1 - G(s)H(s)}\end{aligned}$$

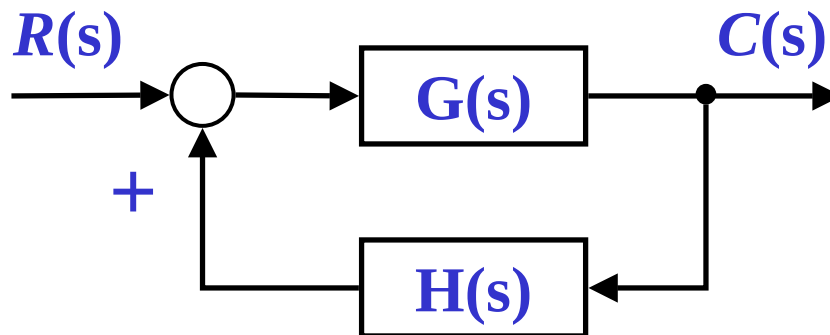


图4-8

特征方程： $1 - G(s)H(s) = 0$

$$\therefore G(s)H(s) = 1 = 1 \cdot e^{j2k\pi}$$

$$\text{又 } G(s)H(s) = \frac{k^* \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)}$$

$\therefore$ 得根轨迹方程：

$$\frac{k^* \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)} = 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} k^* = \frac{\prod_{j=1}^n |s - p_j|}{\prod_{i=1}^m |s - z_i|} \\ \sum_{i=1}^m \angle(s - z_i) - \sum_{j=1}^n \angle(s - p_j) = 2k\pi \end{array} \right.$$

模值条件

相角条件

比较：两者模值条件相同，相角条件相差 180°

3、法则调整

法则3：接近线

$$\varphi_a = \frac{2k\pi}{n-m} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-m-1)$$

$$\sigma_a = \frac{\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m}$$

法则4：实轴上的根轨迹

实轴上的某一区域，若其右边开环实数零极点个数之和为**偶数**，则该区域必是根轨迹。

法则6：根轨迹的起始角与终止角

$$\text{起始角 } \theta_{p_i} \quad \vartheta_{p_i} = \sum_{j=1}^m \varphi_{z_j p_i} - \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^n \vartheta_{p_j p_i}$$

$$\text{终止角 } \varphi_{z_i} \quad \varphi_{z_i} = - \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^m \varphi_{z_j z_i} + \sum_{j=1}^n \vartheta_{p_j z_i}$$

例7：设正反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{k^*(s+2)}{(s+3)(s^2+2s+2)}$$

画出其概略根轨迹，并确定使系统稳定的 k^* 值。

解：开环极点有3个（ $n=3$ ）； $p_1=-3$ 、 $p_2=-1+j$ 、 $p_3=-1-j$ ；
开环零点1个（ $m=1$ ）： $z_1=-2$

根轨迹有3条 ($=\max(n,m)=3$)

接近线有2条 ($=n-m=2$)

$$\varphi_a = \frac{2k\pi}{n-m} = 0, \pi$$

$$\sigma_a = \frac{\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m} = \frac{-3 + (-1+j) + (-1-j) - (-3)}{3-1} = -\frac{3}{2}$$

实轴上的根轨迹区间为： $(-\infty, -3]$, $[-2, +\infty)$

在 $[-2, +\infty)$ 区间有分离点

$$\frac{1}{d+2} = \frac{1}{d+3} + \frac{1}{d+1-j} + \frac{1}{d+1+j} \quad \longrightarrow \quad d \approx -0.8$$

$$\text{分离点角：} \frac{(2k+1)\pi}{l} = \frac{\pi}{2}$$

起始角: $\vartheta_{p_2} = 45^\circ - (90^\circ + 26.6^\circ) = -71.6^\circ$

$$\vartheta_{p_3} = 71.6^\circ$$

根轨迹与虚轴相交于坐标原点

$\therefore$ 坐标原点对应的根轨迹增益为临界值。

由模值条件求得

$$k^* = \frac{|0 - (-1 + j)| \cdot |0 - (-1 - j)| \cdot |0 - (-3)|}{|0 - (-2)|} = 3$$

$\therefore$ 使该正反馈系统稳定的 k^* 范围是: $0 < k^* < 3$

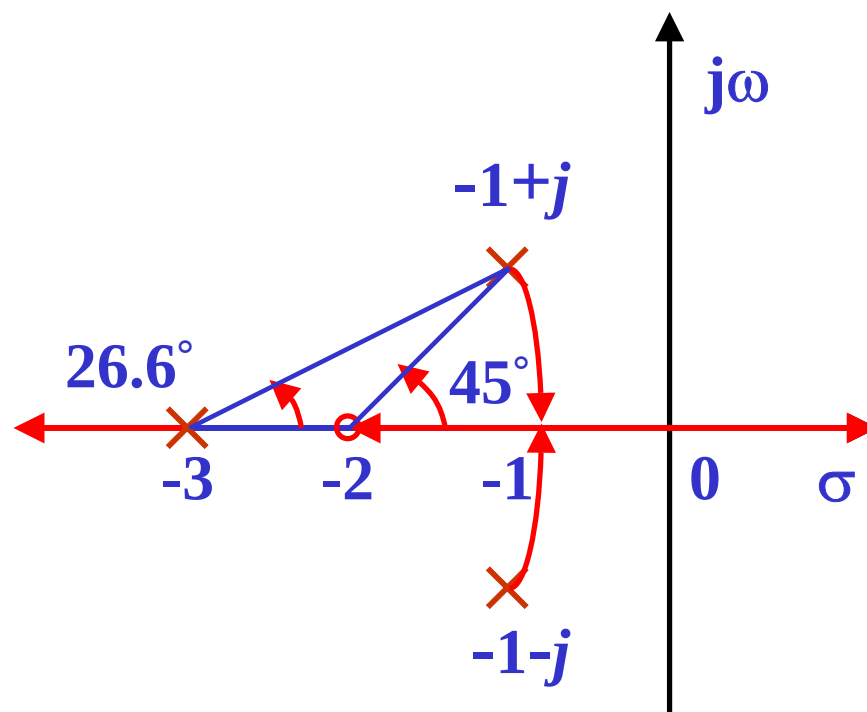


图4-9 例7的根轨迹图

二、参数根轨迹

1、定义

以**非开环增益**为可变参数绘制的根轨迹。

2、绘制步骤

1) 写出原系统的特征方程: $G(s)H(s) = -1$

2) 以特征方程中不含参量的各项除特征方程, 得等效系统的开环传递函数

$$A \frac{P(s)}{Q(s)} = -1$$

A : k^* 以外的系统任意的变化参数。

$$G'(s)H'(s) = A \frac{P(s)}{Q(s)}$$

$P(s)$ 、 $Q(s)$: 与 A 无关的首一多项式。

3) 绘制等效系统的根轨迹, 即为原系统的参数根轨迹。

例8：某控制系统的结构图如图所示。1) 当 $K_n=0.5$ 时，试绘制 K 从 $0 \rightarrow \infty$ 的闭环系统的概略根轨迹；2) 当 $K=1$ 时，试绘制 K_n 从 $0 \rightarrow \infty$ 的闭环系统的参数根轨迹；

解：1) 当 $K_n=0.5$ 时

系统开环传递函数

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+1)} \cdot (1 + K_n s)$$

$$= \frac{K^*(s+2)}{s(s+1)}$$

这里， $K^* = \frac{K}{2}$

根轨迹的起点有2个， $p_1=0$ 、 $p_2=-1$ ；

终点为：-2和无穷远处。

实轴上的根轨迹区间为： $(-\infty, -2]$ ， $[-1, 0]$

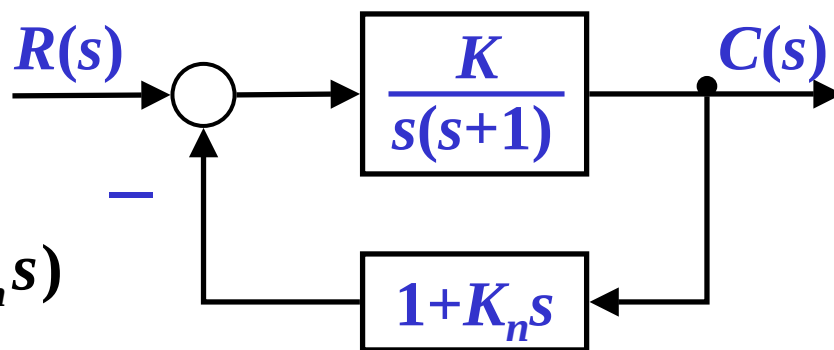


图4-10

在 $(-\infty, -2]$, $[-1, 0]$ 区间分别有分离点 ,

$$\frac{1}{d+2} = \frac{1}{d} + \frac{1}{d+1} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} d_1 = -3.414 \\ d_2 = -0.586 \end{cases}$$

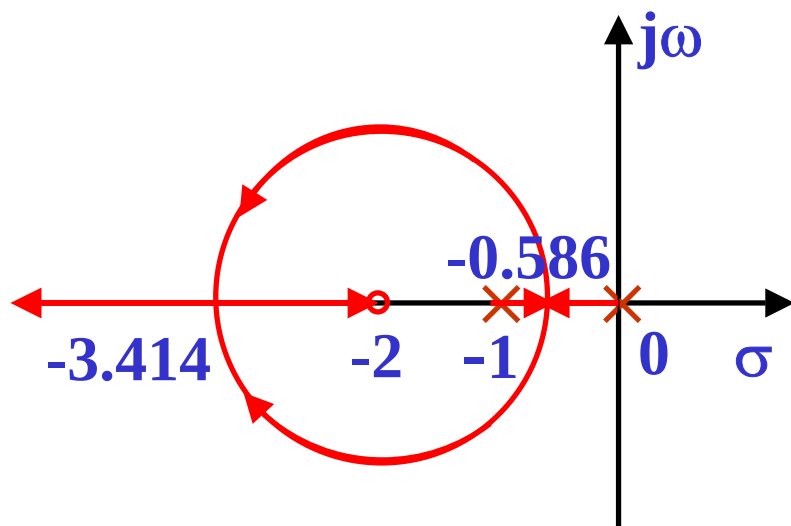


图4-11 例8的根轨迹图 ($K_n=0.5$)

2) 当 $K=1$ 时

系统开环传递函数

$$G(s)H(s) = \frac{1 + K_n s}{s(s+1)}$$

系统闭环特征方程

$$1 + G(s)H(s) = 0 \quad \longrightarrow \quad 1 + K_n s + s^2 + s = 0$$

$$\frac{1 + K_n s + s^2 + s}{s^2 + s + 1} = 0$$

$$\therefore G'(s)H'(s) = K_n \frac{s}{s^2 + s + 1}$$

$$\text{根轨迹的起点有2个：} p_1 = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \quad p_2 = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

终点为：0和无穷远处。

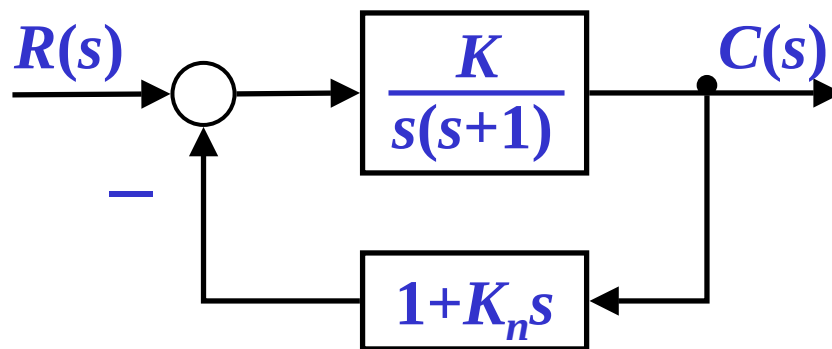


图4-10

实轴上的根轨迹区间为： $(-\infty, 0]$

在 $(-\infty, 0]$ 区间分别有分离点，

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{d + \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{1}{d + \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}} \quad \Rightarrow \quad d = -1$$

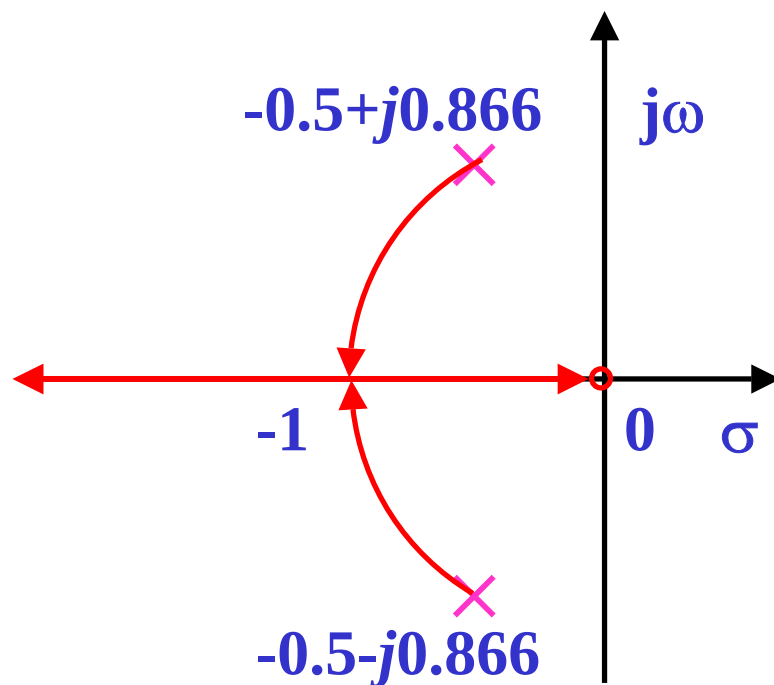


图4-12 例8的参数根轨迹图 ($K=1$)