第7章 随机过程基础知识

伊藤引理、费曼定理与Girsanov定理

阅读材料

1. John Hull，期权、期货和其他衍生品（第8版）第13章
2. Steven E. Shreve, Stochastic Calculas for Finance Ⅱ: Continuous-Time Models.

均值与方差

- 随机变量的均值为*u*，方差为1，进行*n*次独立的实验，每次实验结果的均值和方差是什么？ *n*次实验结果的平均值呢？

随机过程

- 股票、汇率和利率随时间的变化。
- 包含不确定性。

马尔科夫过程

- 在马尔科夫过程中，未来的变量变动只依赖于变量现在的取值，而不是变量怎么达到现在的取值。
- 通常假设股票价格服从马尔科夫过程。
- 特定地点的气温服从马尔科夫过程吗？

弱式市场有效

- 在弱式市场有效假设下，根据历史价格设计的股票交易策略不能获得超额收益。也就是说，技术分析是无效的。
- 服从马尔科夫过程的股价满足弱式有效市场假设。

举个栗子

- 变量现在的取值是40。
- 变量服从马尔科夫过程。
- 变量的变化是平稳的。
- 在1年之后，变量服从以40为均值、标准方差为10的正态分布。

如果在不同时间段内变量变化的均值为零，方差不变，则称变量是平稳的。

问题

- 股票价格在2年之后的概率分布是什么？
- 在½年之后呢？
- 在Δt 年之后呢？

维纳过程

- 令变量 z 在短时间 Δt 内的变化是 Δz。如果变量的变化 Δz 服从以零为均值、以 Δt 为方差的正态分布，且任何两个时点的变化相互独立，则该过程为标准维纳过程。

标准维纳过程的性质

1. $E\left[z\left(t+n\Delta t\right)-z\left(t\right)\right]=0$
2. $Cov\left(z(t_i+\Delta t)-\mathrm{z}(\mathrm{t}_i),z(t_j+\Delta t)-\mathrm{z}(\mathrm{t}_j)\right)=0$
3. $\mathrm{Var}\left(z(t+n\Delta t)-\mathrm{z}(\mathrm{t})\right)=n\,\mathrm{Var}\left(z(t+\Delta t)-\mathrm{z}(\mathrm{t})\right)$

当时间的变化趋近于零时，可以得到

$E\left[dz\left(t\right)\right]=0$ $\quad\quad Cov\left(dz(t_i),dz(t_j)\right)=0$

$\mathrm{Var}\left(dz(t)\right)=dt$

广义维纳过程

$$dx = a\ dt + bdz(t)$$

其中，$dz(t)$为标准维纳过程

- x 在单位时间内的变化的均值为a。
- x 在单位时间内的变化的方差为 b^2。

伊藤引理

- 在伊藤过程中，变量变化的速度和变化的方差可以是时间的函数，即

$$dx = a(x,t)\,dt + b(x,t)\,dz$$

- 在离散的情况下，随着Δt 趋近于零，以下公式成立。

$$\Delta x = a(x,t)\Delta t + b(x,t)\varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

其中，ε 服从标准正态分布。

伊藤引理

- 如果G是维纳过程x和时间t的函数，即 $G = G(x, t)$ ，给定x服从的维纳过程, 伊藤引理告诉我们$G(x, t)$应该满足的偏微分方程。这个偏微分方程就称为伊藤公式。

- 由于衍生品的价格依赖于基础资产的价格，伊藤引理在衍生品定价分析中有非常重要的应用。

泰勒级数展开

- $G(x, t)$ 的泰勒展开式为：

$$\Delta G = \frac{\partial G}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial G}{\partial t}\Delta t + ½\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\Delta x^2$$

$$+ \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial t}\Delta x\,\Delta t + ½\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}\Delta t^2 + \ldots$$

忽略比 Δt更高阶的无穷小项

在通常的微分过程中，我们有

$$\Delta G = \frac{\partial G}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial G}{\partial t}\Delta t$$

在随机微分过程中，我们有

$$\Delta G = \frac{\partial G}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial G}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\Delta x^2$$

两者不同的原因在于 Δx 中含有一项与 $\sqrt{\Delta t}$ 同阶的无穷小。

替代 Δx

假设

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz$$

即

$$\Delta x = a\ \Delta t + b\ \varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

忽略比Δt更高阶的无穷小项，可以得到

$$\Delta G = \frac{\partial G}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial G}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2\varepsilon^2\Delta t$$

ε²Δt项

由于$\varepsilon \approx \varphi(0,1)$， 所以$E(\varepsilon)=0$

$$E(\varepsilon^2)-[E(\varepsilon)]^2=1$$

$$E(\varepsilon^2)=1$$

因此，$E(\varepsilon^2\Delta t)=\Delta t$。

$$\lim_{\Delta t\to 0}\mathrm{var}(\varepsilon^2\Delta t)=\lim_{\Delta t\to 0}\Delta t^2\mathrm{var}(\varepsilon^2)=0$$

因此，$\varepsilon^2\Delta t$可以用Δt替代

$$\Delta G=\frac{\partial G}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial G}{\partial t}\Delta t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2\Delta t$$

取极限

取极限: $dG=\frac{\partial G}{\partial x}dx+\frac{\partial G}{\partial t}dt+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2dt$

代入： $dx=a\ dt+b\ dz$

得到： $dG=\left(\frac{\partial G}{\partial x}a+\frac{\partial G}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2\right)dt+\frac{\partial G}{\partial x}b\ dz$

这就是伊藤引理

伊藤引理的应用

股价的波动服从

$$dS = \mu S\ dt + \sigma S\ dz$$

G 是 S 和 t的函数

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial S} \mu S + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial S} \sigma S\ dz$$

费曼定理（Feynman-Kac定理）

- 在风险中性测度下，股票价格服从以下随机过程。

$$dS = rSdt + \sigma SdW$$

- 给定函数*h(S)*，定义函数

$$f\left(S(t),t\right) = E\left[e^{-\int_t^T rdt} h\left(S(T)\right) \middle| F(t)\right]$$

- 则 $f\left(S,t\right)$ 满足以下PDE。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf$$

- 边界条件：$f\left(S(T),T\right) = h(S(T))$

费曼定理（Feynman-Kac定理）

- 给定函数*h(S)*，定义函数

$$f\left(S(t),t\right)=E\left[e^{-\int_t^T rds}h\left(S(T)\right)\middle|F(t)\right]$$

$$d\left(e^{-\int_0^t rds}f\right)=e^{-\int_0^t rds}df-e^{-\int_0^t rds}rfdt$$

$$=e^{-\int_0^t rds}\left(df-rfdt\right)$$

$$=e^{-\int_0^t rds}\left(\frac{\partial f}{\partial S}dS+\frac{\partial f}{\partial t}dt+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}(dS)^2-rfdt\right)$$

$$=e^{-\int_0^t rds}\left[\left(rS\frac{\partial f}{\partial S}+\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}-rf\right)dt+\sigma S\frac{\partial f}{\partial S}dW\right]$$

费曼定理（Feynman-Kac定理）

$$\because \ f\left(S(t),t\right)=E\left[e^{-\int_t^T rds}h\left(S(T)\right)\middle|F(t)\right]$$

$$\therefore \ e^{-\int_0^t rds} f\left(S(t),t\right)=E\left[e^{-\int_0^T rds}h(S(T))\middle|F(t)\right]$$

$$\forall \ t\le\tau\le T$$

$$E\left[e^{-\int_0^\tau rds} f\left(S(\tau),\tau\right)\middle|F(t)\right]$$

$$=E\left[E\left[e^{-\int_0^T rds}h(S(T))\middle|F(\tau)\right]\middle|F(t)\right]$$

$$=E\left[e^{-\int_0^T rds}h(S(T))\middle|F(t)\right]$$

$$=e^{-\int_0^t rds} f\left(S(t),t\right)$$

$$\therefore \ e^{-\int_0^t rds} f\left(S(t),t\right) \ is \ a \ martingale.$$

费曼定理（Feynman-Kac定理）

- 因此，$d\left(e^{-\int_0^t r ds} f\right)$ 的漂移项的系数为零，即

$$rS\frac{\partial f}{\partial S}+\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}-rf=0$$

- 边界条件为

$$f\left(S(T),T\right)=h(S(T))$$

Girsanov定理

在概率空间(Ω, F, P)，变量 $X \sim N(0,1)$ ，构造概率空间(Ω, F, Q)，使得 $X+\theta \sim N(0,1)$。

$$Z = e^{-\theta X - \frac{1}{2}\theta^2}$$

$$\forall A \in F \quad Q(A) = \int_A Z(\omega) dP(\omega)$$

Girsanov定理

- 在带滤子的空间$\left(\Omega,F,F(t),P\right)$,$W^P(t),0\le t\le T$ 是布朗运动。

- 构造带滤子空间$\left(\Omega,F,F(t),Q\right)$，使得$W^Q(t)$为布朗运动。

$$W^Q(t)=W^P(t)+\int_0^t\theta(u)du$$

Girsanov定理

定理：设 $\theta(t)$ 是任意适应过程，则$W^Q(t)$在带滤子空间Q为布朗运动。

$$W^Q(t) = W^P(t) + \int_0^t \theta(u)\,du$$

$$Z(t) = e^{-\int_0^t \theta(t)\,dW(t) - \int_0^t \frac{1}{2}\theta^2(t)\,dt}$$

$$Q(A) = \int_A Z(\omega)\,dP(\omega) \quad \forall A \in F(t)$$

Girsanov定理

- 1. Q是概率测度空间。

- 2. $dW^{Q}\left(t\right)dW^{Q}\left(t\right)=dt$ 。

- 3. $W^{Q}(t)$是鞅过程。

Girsanov定理

- Q是概率测度空间。Q为非负且E[Z]=1。

$$X(t)=-\int_0^t \theta(t)dW^P(t)-\int_0^t \frac{1}{2}\theta^2(t)dt$$

$$f\left(X(t)\right)=e^X$$

$$dZ(t)=df\left(X(t)\right)$$

$$=f'\left(X(t)\right)dX(t)+\frac{1}{2}f''\left(X(t)\right)\left(dX(t)\right)^2$$

$$=Z(t)\left(-\theta(t)dW^P(t)-\frac{1}{2}\theta^2(t)dt\right)+\frac{1}{2}Z(t)\theta^2(t)dt$$

$$=-Z(t)\theta(t)dW^P(t)$$

$$Z(t)=Z(0)-\int_0^t Z(t)\theta(t)dW^P(t)$$

$$E^P\left[Z(t)\right]=Z(0)=1$$

$$E^Q\left[I(\omega)\right]=E^P\left[Z(\omega)\right]=1$$

Girsanov定理

- 证明 $dW^{Q}(t)dW^{Q}(t)=dt$

$$
\begin{aligned}
dW^{Q}(t)dW^{Q}(t) &= \left(dW^{P}(t)+\theta(t)dt\right)\left(dW^{P}(t)+\theta(t)dt\right) \\
&= dW^{P}(t)dW^{P}(t) \\
&= dt
\end{aligned}
$$

Girsanov定理

- 为了证明$W^Q(t)$是鞅过程，先要证明两个个定理。

Girsanov定理

- 定理1：$0 \le s \le t \le T$，$\mathrm{Y} \in \mathrm{F(t)}$ ，则以下公式成立 $E^Q\left[Y \middle| F(s)\right] = \frac{1}{Z_s} E\left[YZ(t) \middle| F(s)\right]$

$$\forall A \in F(s)$$

$$\int_A \frac{1}{Z_s} E\left[YZ(t)|F(s)\right] dQ$$

$$= \int_A E\left[YZ(t)|F(s)\right] dP$$

$$= \int_A E\left[E\left[Y|F(s)\right] Z(t)|F(s)\right] dP$$

$$= \int_A E\left[Y|F(s)\right] E\left[Z(t)|F(s)\right] dP$$

$$= \int_A E\left[Y|F(s)\right] Z(s) dP$$

$$= \int_A Y dQ$$

$$= \int_A E^Q\left[Y|F(s)\right] dQ$$

Girsanov定理

- 定理2：在概率空间P随机变量$\tilde{W}(t)Z(t)$ 是鞅过程。

$$d\left(\tilde{W}(t)Z(t)\right)=Z(t)d\tilde{W}(t)+\tilde{W}(t)dZ(t)+d\tilde{W}(t)dZ(t)$$

$$=Z(t)dW(t)\left(1-\theta(t)d\tilde{W}(t)\right)$$

Girsanov定理

- 证明 $\tilde{W}(t)$ 是鞅过程。

$$\forall 0 \le s \le t \le T$$

$$\begin{aligned} E^Q\left[\tilde{W}(t) \middle| F(s)\right] &= \frac{1}{Z(s)} E\left[\tilde{W}(t) Z(t) \middle| F(s)\right] \\ &= \frac{1}{Z(s)} \tilde{W}(s) Z(s) \\ &= \tilde{W}(s) \end{aligned}$$

Girsanov定理应用

- 该定理在资产定价中的应用

  设股票的价格服从以下随机过程：

  $$dS = \mu S dt + \sigma S dW(t)$$

  在风险中性的测度P下，股票价格服从随机过程：

  $$dS = rSdt + \sigma Sd\tilde{W}(t)$$

  其中，$\tilde{W}(t) = W(t) + \int_0^t \lambda du \quad \lambda = \frac{\mu - r}{\sigma}$ 。

  设资产的回报为V，无风险利率的贴现因子为D，则资产价格为 $D(t)E^P\left[V(T)\right] = e^{-r(T-t)}E^P\left[V(T)\right]$ 。

Girsanov定理应用

$$d\tilde{W}(t) = dW(t) + \lambda dt$$

$$\begin{aligned} dS &= \mu S dt + \sigma S dW(t) \\ &= (\mu - \lambda\sigma) S dt + \sigma S d\tilde{W}(t) \\ &= r S dt + \sigma S d\tilde{W}(t) \end{aligned}$$

风险资产的超额收益为 $\mu - r = \lambda\sigma$，其中*Lamda*是风险的价格，*Sigma*是风险的数量。

Girsanov定理应用：测度变换

- 设两种资产在风险中性测度P下分别服从

$$dN = rNdt + vNd\tilde{W}$$

$$dS = rSdt + \sigma Sd\tilde{W}$$

- 则用*S*作为计价单位的资产价格 $\frac{N}{S}$ 在测度Q下是鞅过程。

$$\frac{N_0}{S_0} = E^Q\left[\frac{N_t}{S_t}\right]$$

- 概率测度Q可定义为：

$$dP = \exp\left(\int_0^t \sigma d\tilde{W} - \frac{1}{2}\int_0^t \|\sigma\|^2 dt\right)dQ$$

Girsanov定理应用：测度变换

- 设现实测度Q和风险中性测度P为等价测度，且

$$dW = d\tilde{W} - \sigma dt$$

- 设欧式看涨期权的价格为*c(t)*。设股票价格S服从几何布朗运动，则新测度P下的漂移项为 $r+\sigma^2$，则

$$\frac{c(t)}{S(t)} = E_t^P\left[\frac{c(T)}{S(T)}\right]$$

$$c(t) = S(t)E_t^P\left[\frac{\left(S(T)-K\right)^+}{S(T)}\right]$$