



湖南大學
HUNAN UNIVERSITY

第九章 压杆稳定

主讲人：冯慧



本章内容

- ❖ § 9.1 压杆稳定的概念
- ❖ § 9.2 两端铰支细长压杆的临界压力
- ❖ § 9.3 其他支座条件下细长压杆的临界压力
- ❖ § 9.4 欧拉公式的适用范围 经验公式
- ❖ § 9.5 压杆的稳定性校核
- ❖ § 9.6 提高压杆稳定性的措施

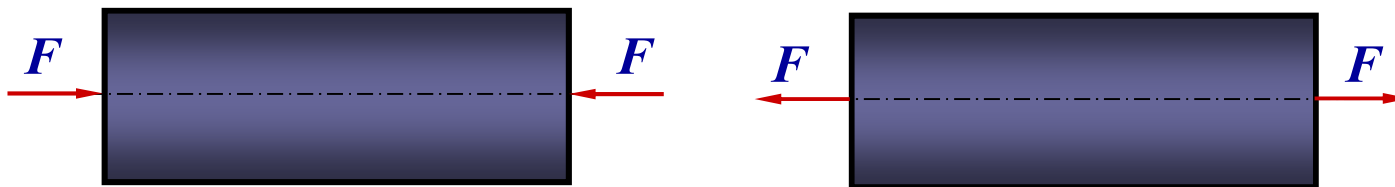




§ 9.1 压杆稳定的概念

回顾：拉压杆的强度条件 $\sigma = \frac{F_N}{A} \leq [\sigma]$

问题的提出：强度条件是否适用于下列拉压杆？



短粗杆



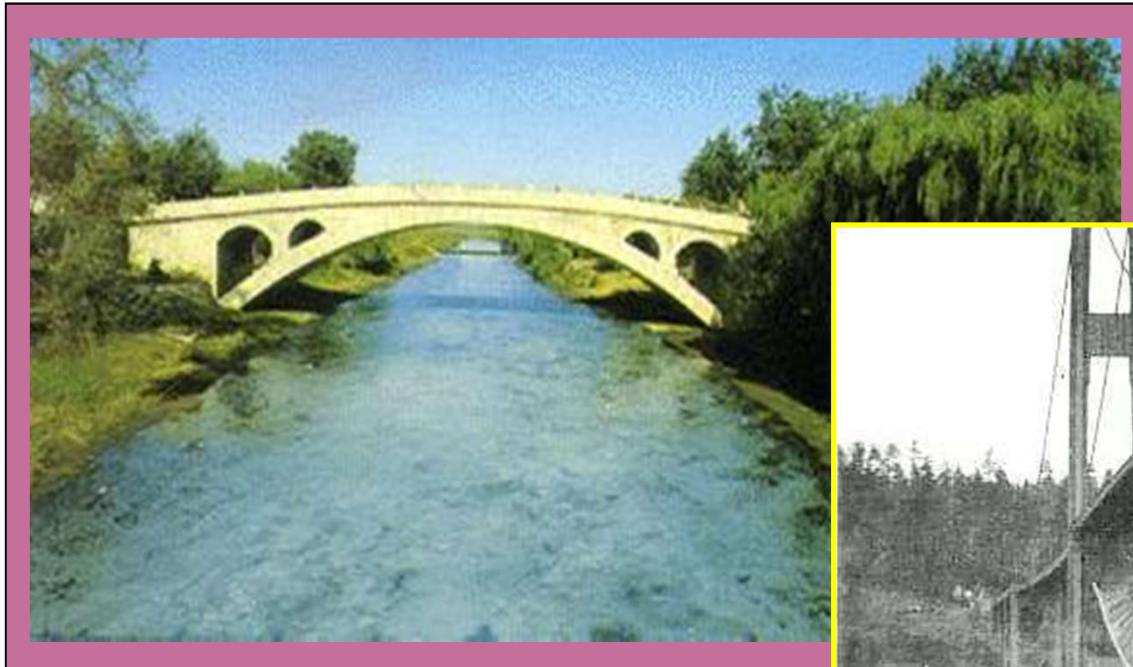
细长杆



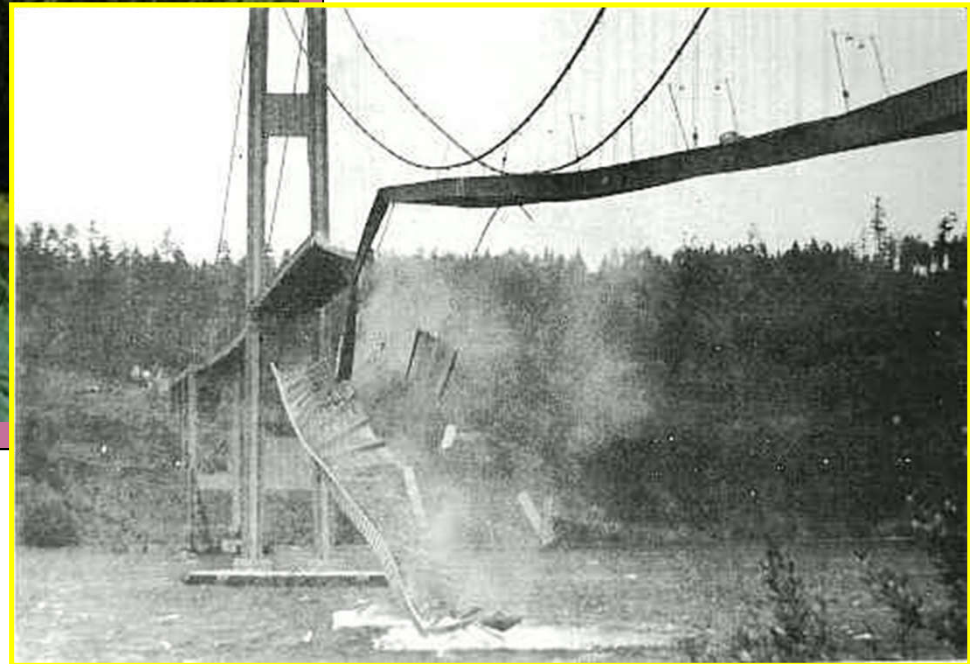


§ 9.1 压杆稳定的概念

● 工程实例：石桥、钢桥与稳定问题



左图：赵州桥
(隋朝)



右图：Tacoma 海峡大桥
(1940年破坏)

Euler(1707-1783)首先从理论上研究了压杆稳定问题(Euler理论)



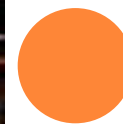


§ 9.1 压杆稳定的概念

1.1907年加拿大一在建桥，由于悬臂桁架中的一根压杆失稳，造成桥梁倒塌，9000吨钢材变成一堆废墟。

2.1922年冬下，美国华盛顿一剧院由于屋顶结构受大雪压力，致使一根压杆超载失稳，引起剧院倒塌，死98人，伤100余人。

3.2000年10月，在南京电视台演播中心演播厅屋顶的浇筑混凝土施工中，因脚手架失稳，造成演播厅屋顶模板倒塌，死5人，伤35人。





§ 9.1 压杆稳定的概念



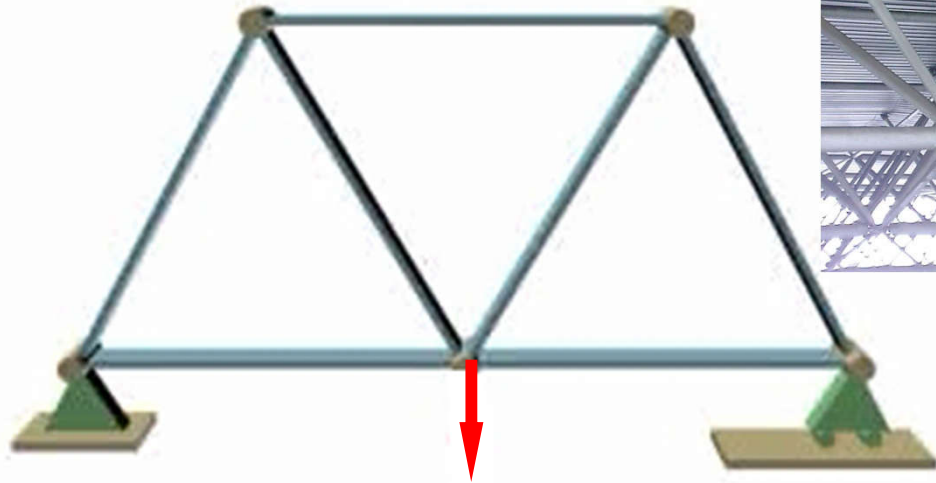
冰雪摧毁的电塔





§ 9.1 压杆稳定的概念

• 桁架的稳定性



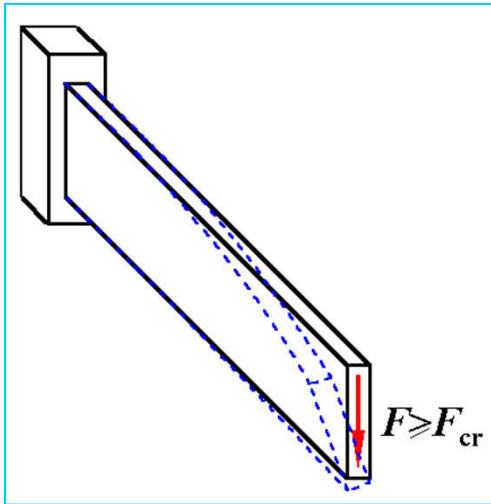
为什么桁架要尽可能设计成各杆受拉?



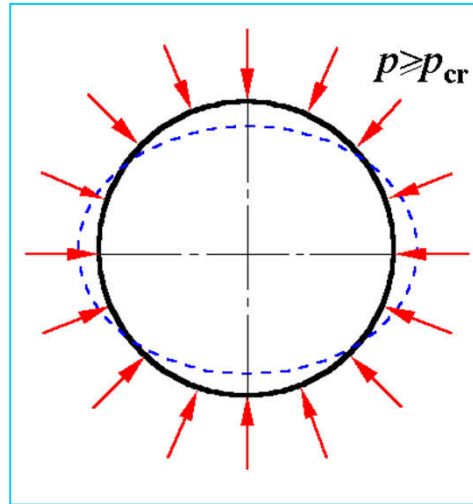


§ 9.1 压杆稳定的概念

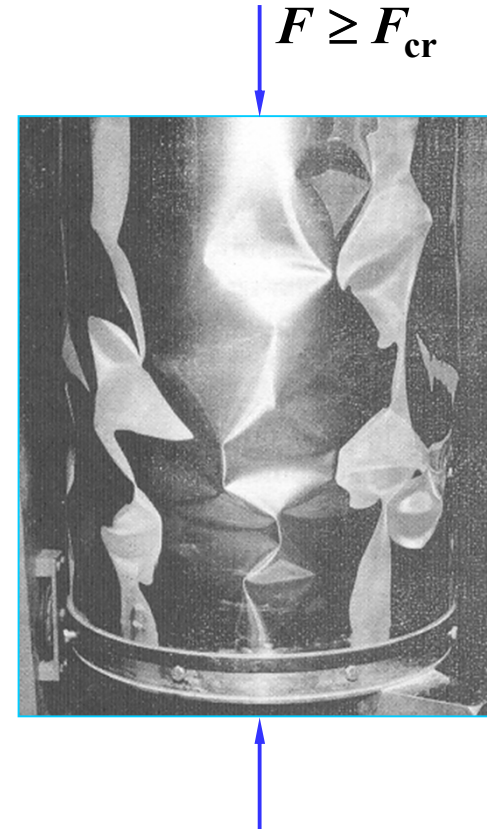
- 其他形式的稳定问题



窄高梁弯曲



薄壁件受外压



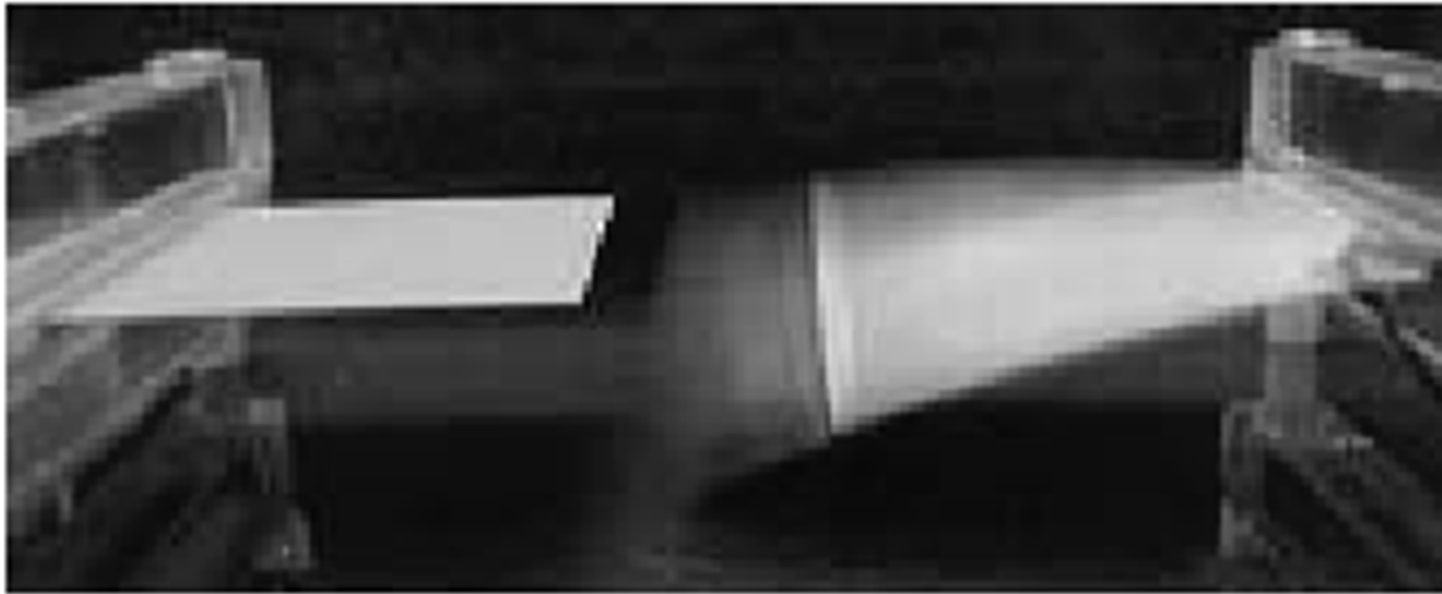
薄壁圆筒轴向受压





§ 9.1 压杆稳定的概念

• 风洞颤振试验照片



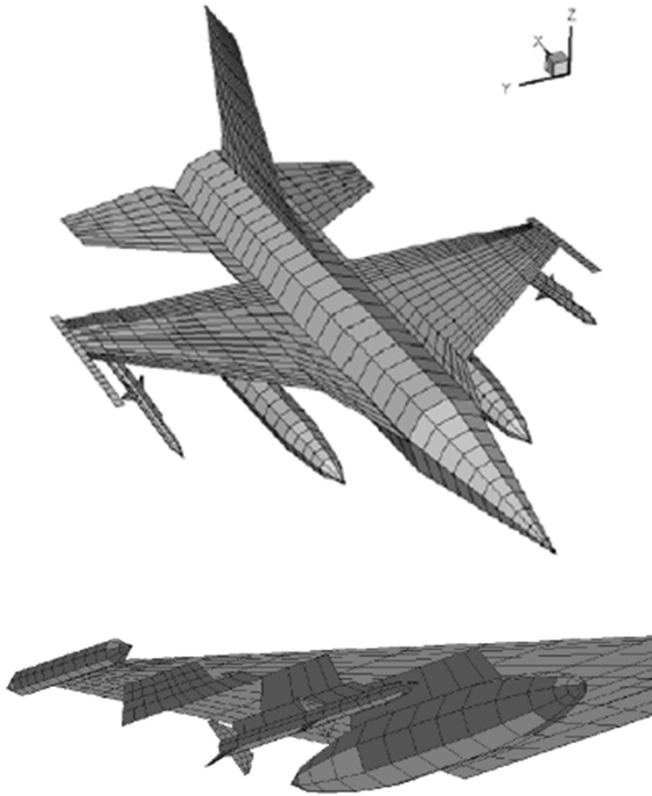
左侧为风速低于颤振速度，结构稳定；
右侧为风速等于颤振速度，结构振动发散。



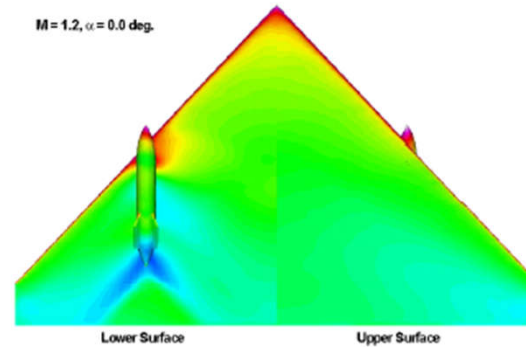


§ 9.1 压杆稳定的概念

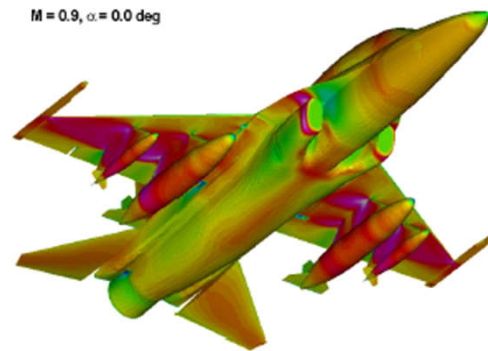
• 飞机颤振问题研究



Aerodynamic model of wing with three stores



Steady pressure contours of wing/pylon/finned-store model ($M=0.95$ and 1.2).



Mach contour plot on the aircraft surface at $M=0.9$

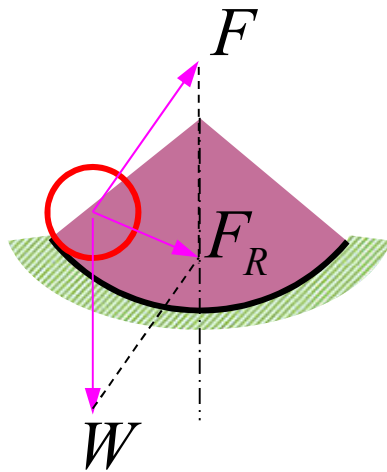




§ 9.1 压杆稳定的概念

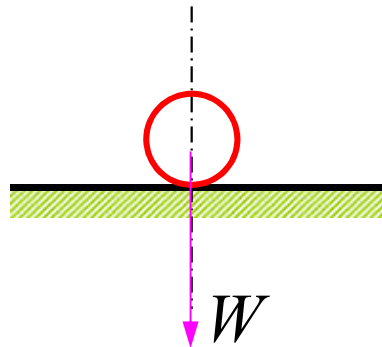
• 刚体与变形体的稳定性

(1) 刚性面上，刚性球受微干扰



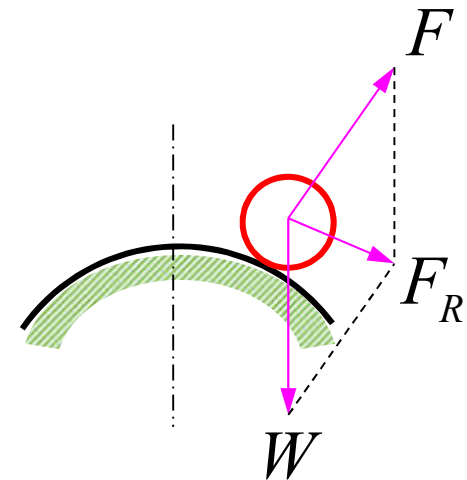
a. 合力 F_R 指向平衡位置

稳定平衡



b. F_R 为 0

临界(随遇)平衡



c. F_R 偏离平衡位置

不稳定平衡





§ 9.1 压杆稳定的概念

(2) 刚杆—弹簧系统受微干扰

刚杆—弹簧系统稳定性演示

a. $F\delta < k\delta l$

稳定平衡

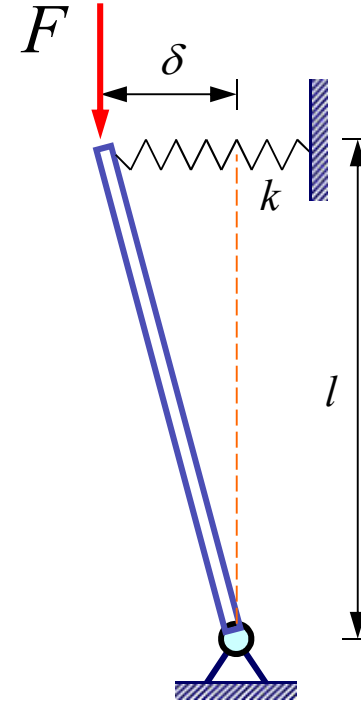
b. $F\delta = k\delta l$

临界(随遇)平衡

c. $F\delta > k\delta l$

不稳定平衡

$F_{cr} = kl$ 临界载荷



$F\delta$ — 驱动力矩

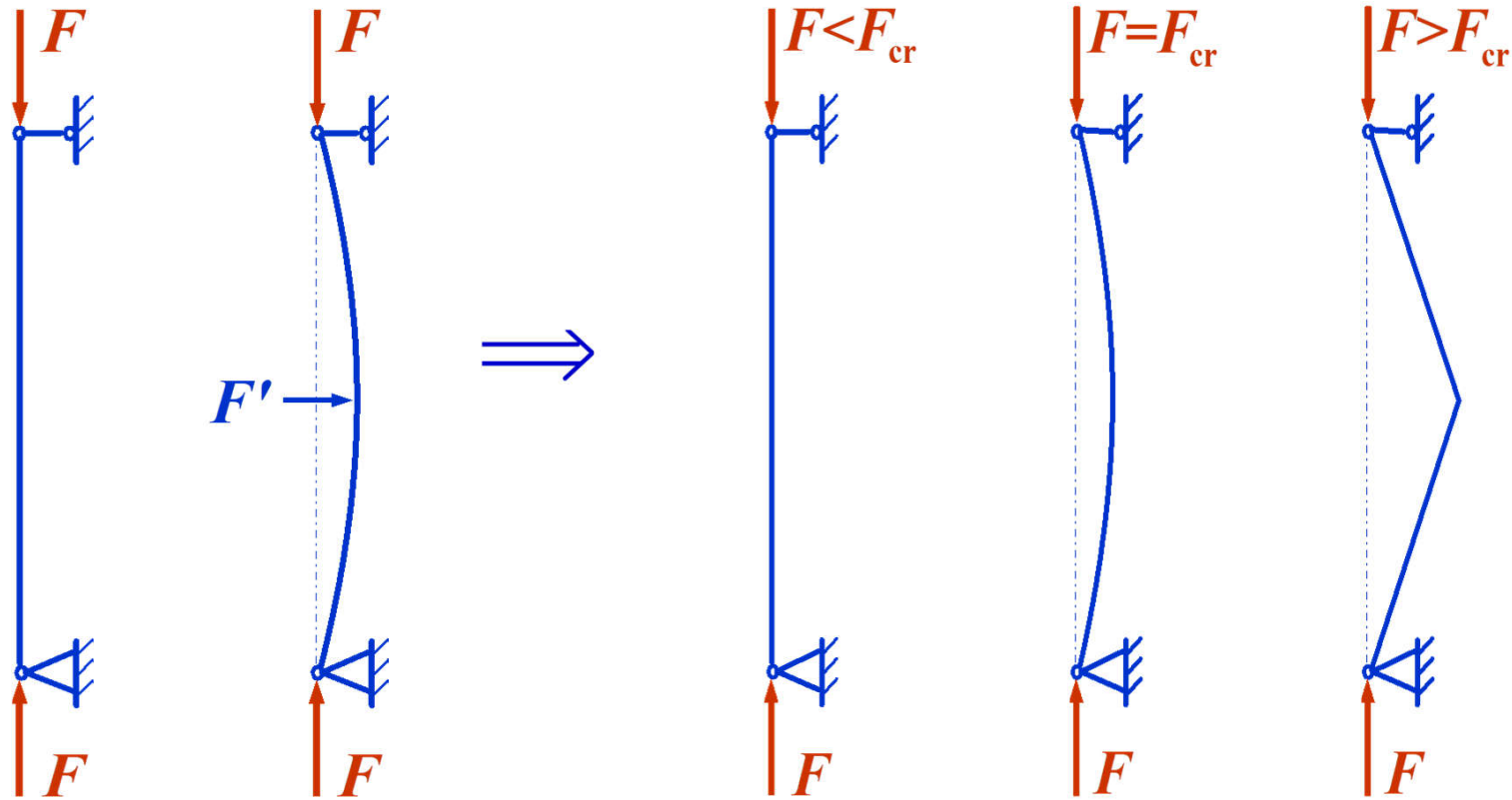
$k\delta l$ — 恢复力矩





§ 9.1 压杆稳定的概念

(3) 受压弹性杆受微干扰



两端铰支压杆失稳动画演示





§ 9.1 压杆稳定的概念

$F < F_{cr}$ 稳定平衡

压杆在微弯位置不能平衡,要恢复直线

$F > F_{cr}$ 不稳定平衡

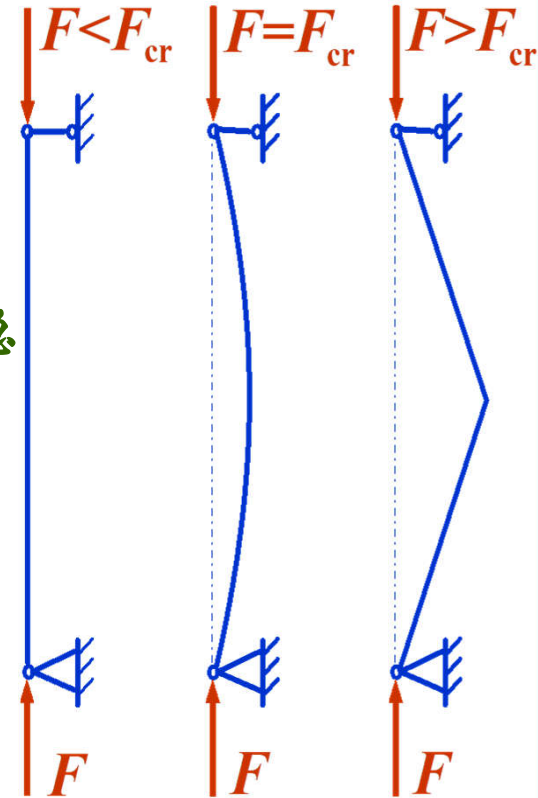
压杆微弯位置不能平衡,要继续弯曲,导致失稳

$F = F_{cr}$ 临界状态

压杆在任意微弯位置均可保持平衡

临界压力 — F_{cr} : 压杆直线形式的平衡由稳定转变为不稳定时的轴向压力值。

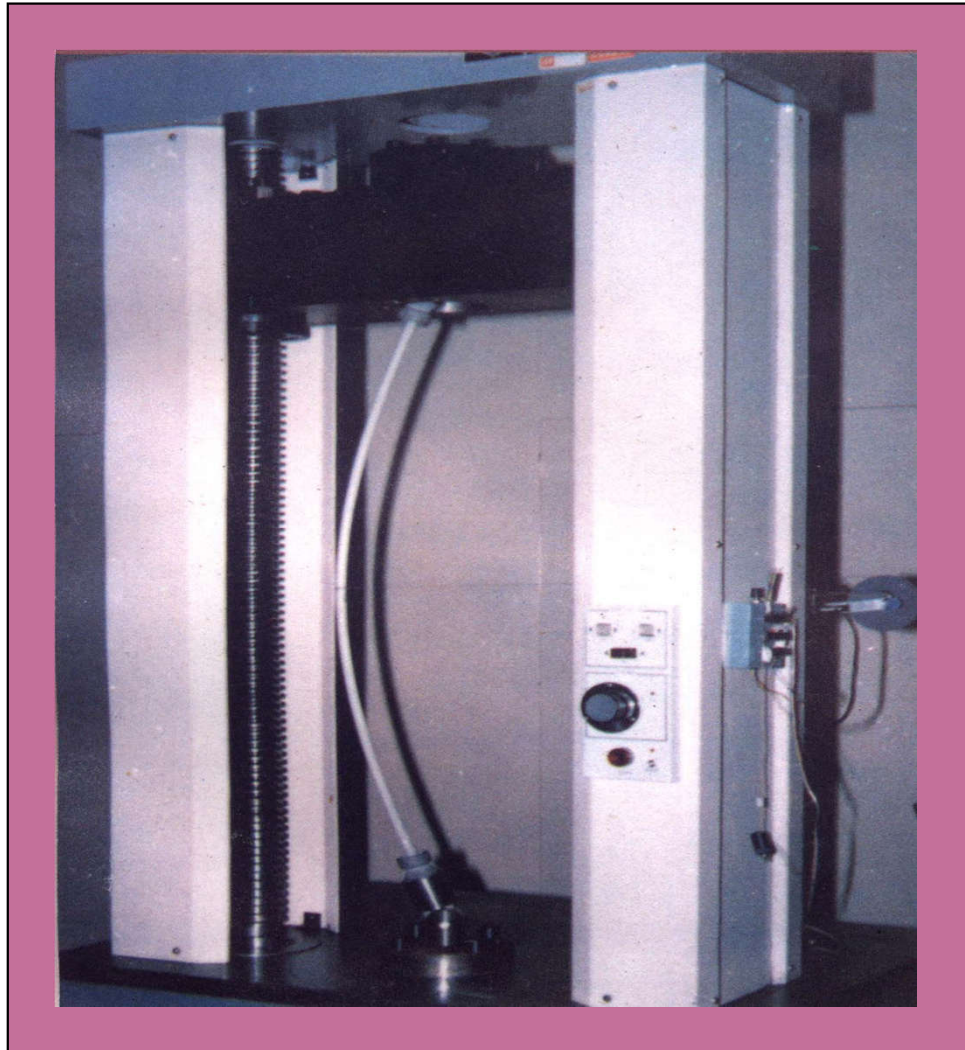
失稳(屈曲)——压杆丧失其稳定平衡状态而过渡到不稳定平衡状态的现象,称为丧失稳定,简称失稳或屈曲。





§ 9.2 两端铰支细长压杆的临界压力

- 两端铰支压杆 临界载荷实验测定





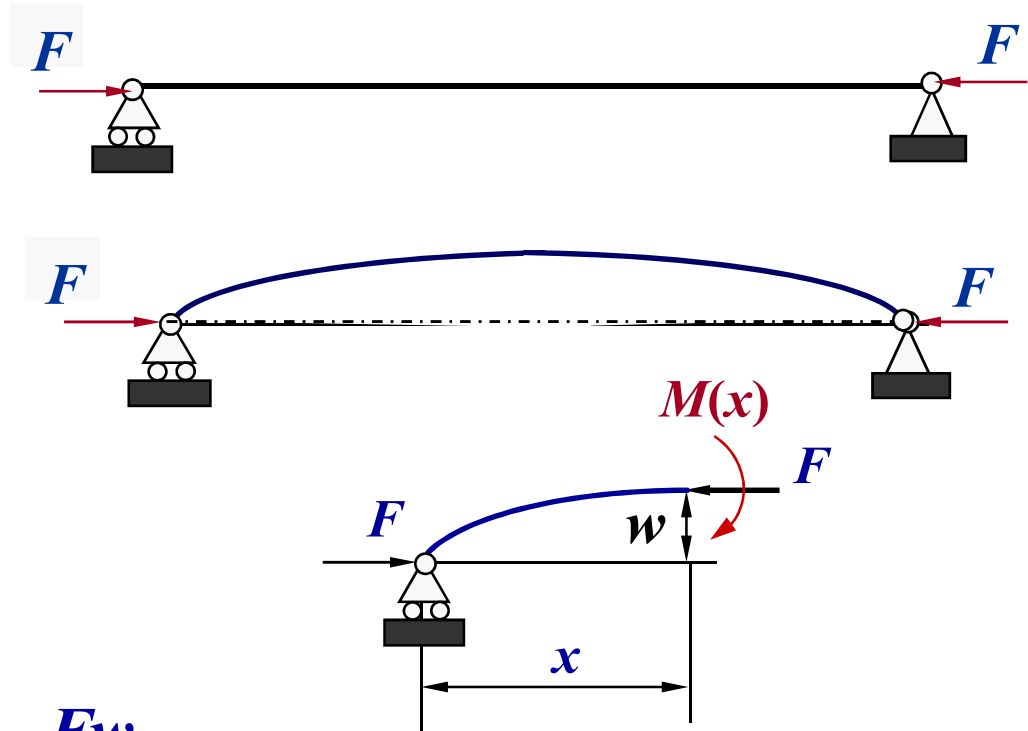
§ 9.2 两端铰支细长压杆的临界压力

一、临界载荷的欧拉公式

• 两端受压简支杆

• 临界平衡状态

• 驱动与恢复内力矩



驱动内力矩 $M(x) = -Fw$

恢复内力矩 $\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \rightarrow M(x) = EI \frac{d^2 w}{dx^2}$

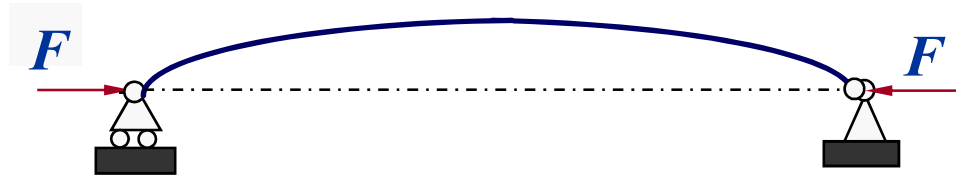




§ 9.2 两端铰支细长压杆的临界压力

驱动内力矩 $M(x) = -Fw$ 恢复内力矩 $M(x) = EI \frac{d^2 w}{dx^2}$

- 压杆稳定微分方程



$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{F}{EI} w \quad \xrightarrow{\frac{F}{EI} = k^2} \quad \frac{d^2 w}{dx^2} + k^2 w = 0$$

- 通解: $w = A \sin kx + B \cos kx$

$$x = 0, w = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0$$

- 位移边界条件:

$$x = l, w = 0 \quad \Rightarrow \quad A \sin kl = 0$$

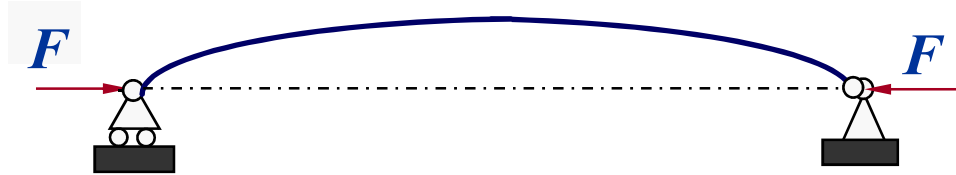
- 存在非零解的条件: $\sin kl = 0$





§ 9.2 两端铰支细长压杆的临界压力

• 临界载荷欧拉公式



$$\sin kl = 0 \quad \longrightarrow \quad kl = n\pi \quad \longrightarrow \quad k = \frac{n\pi}{l}$$

注意到: $\frac{F}{EI} = k^2$, $F = \frac{n^2\pi^2 EI}{l^2}$ ($n = 1, 2, \dots$)

取: $n=1$ $F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$





§ 9.2 两端铰支细长压杆的临界压力

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

二、临界载荷的欧拉公式的几点讨论

- 两端简支压杆的挠曲轴

$$w = A \sin \frac{\pi x}{l}$$

- 压杆在临界状态时的平衡是一种有条件的随遇平衡——可有任意的微弯程度,但轴线形状一定。
- 临界载荷 (欧拉临界载荷)与截面抗弯刚度成正比,与杆长的平方成反比。

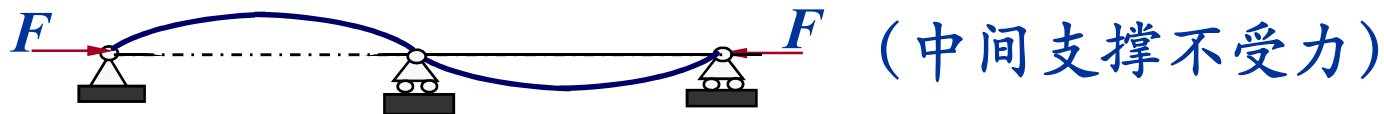




§ 9.2 两端铰支细长压杆的临界压力

• 高阶解的意义: $F = \frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2} \quad (n = 1, 2 \dots)$

当 $n=2$ 时, 得到: $w = A \sin \frac{2\pi}{l} x$



• 欧拉公式的适用范围:

→ 理想均质材料, 细长杆

→ 线弹性

→ 小挠度(小变形)

→ 压力沿杆件轴线

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}$$





§ 9.2 两端铰支细长压杆的临界压力

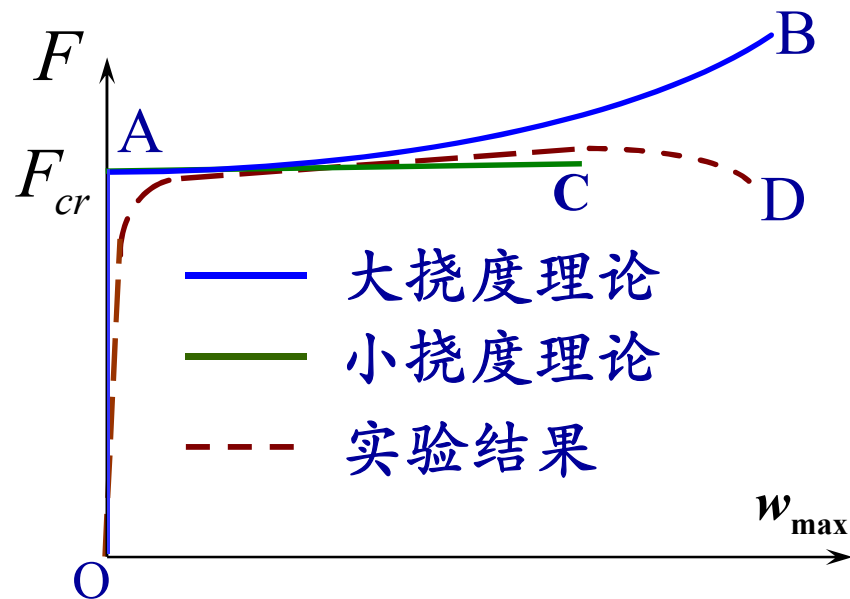
三、大挠度理论与实际压杆

- 精确压杆稳定微分方程
(求解大挠度问题)

$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{M(x)}{EI}$$

$$\frac{w''(x)}{(1 + [w'(x)]^2)^{3/2}} = \frac{M(x)}{EI}$$

- 理想压杆小挠度理论与大挠度理论及实验结果比较



由大挠度理论, $F=1.015F_{cr}$,
 $w_{max}=0.11l$.

比较显示了理想压杆小挠度理论的实际意义。





§ 9.2 两端铰支细长压杆的临界压力

例：已知：两端铰支

细长压杆，横截面直径 $d = 50 \text{ mm}$ ，材料 Q235 钢，弹性模量

$E = 200 \text{ GPa}$ ，

$\sigma_s = 235 \text{ MPa}$ 。

试确定其临界力。

按强度条件，
屈服压力：

$$F_s = \sigma_s \cdot A$$

$$= 461.4 \text{ kN}$$

解：截面惯性矩

$$I = \frac{\pi d^4}{64}$$

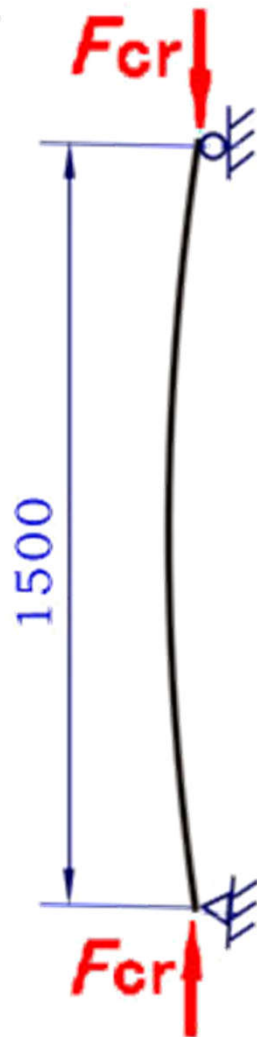
$$= \frac{\pi \times 0.05^4}{64} = 307 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$

临界力

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

$$= \frac{\pi \times 200 \times 10^9 \times 307 \times 10^{-9}}{1.5^2}$$

$$= 269 \text{ kN}$$





§ 9.2 两端铰支细长压杆的临界压力

例：AB刚性杆，BC弹性梁，
弯曲刚度 EI ，求 F_{cr}

解：考虑梁杆结构的临界平衡，
 B 为刚性接头，在 B 处

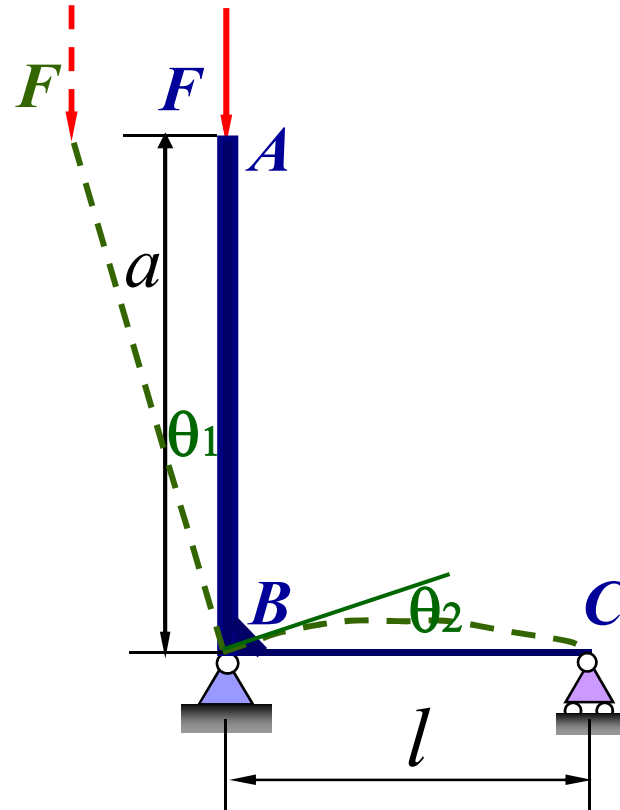
$$\theta_1 = \theta_2$$

由杆， B 处内力偶

$$M_B = F_{cr} a \theta_1, \quad \theta_1 = \frac{M_B}{F_{cr} a}$$

由梁， B 处转角 $\theta_2 = \frac{M_B l}{3EI}$

$$\frac{M_B}{F_{cr} a} = \frac{M_B l}{3EI} \quad \therefore F_{cr} = \frac{3EI}{al}$$





§ 9.3 其他支座条件下细长压杆的临界压力

- 解析法确定临界载荷
- 类比法确定临界载荷
- 相当长度与长度因素
- 例题





§ 9.3 其他支座条件下细长压杆的临界压力

一、解析法确定临界载荷

1. 固支-自由压杆

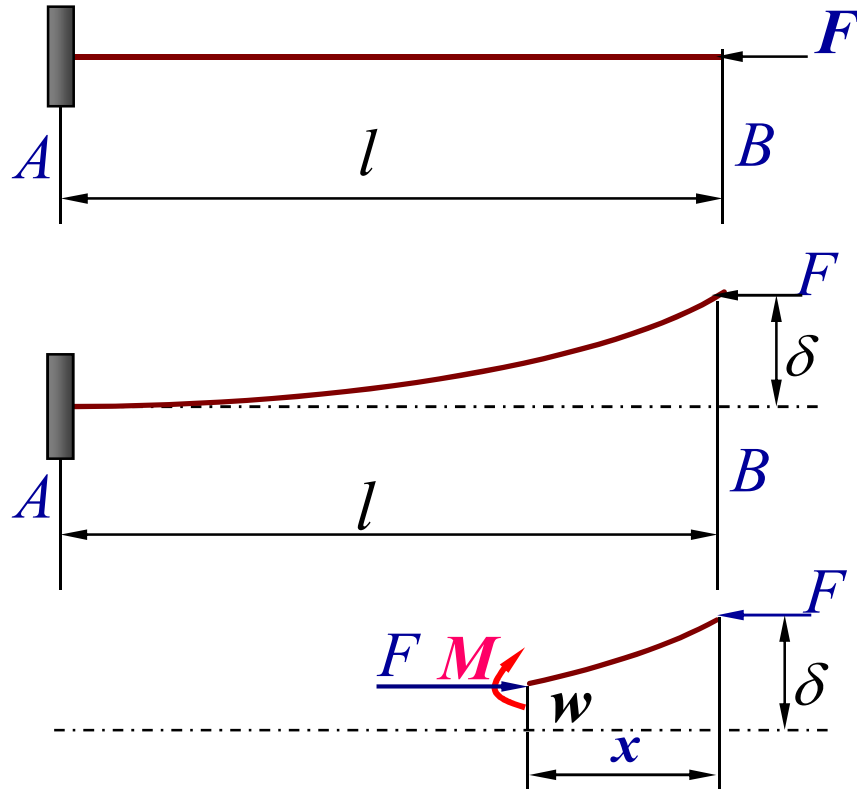
根据微弯临界平衡状态
建立微分方程

$$M(x) = F(\delta - w)$$

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}$$

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{F}{EI}(\delta - w)$$

$$\text{令 } k^2 = \frac{F}{EI} \quad \longrightarrow \quad \frac{d^2 w}{dx^2} + k^2 w = k^2 \delta$$



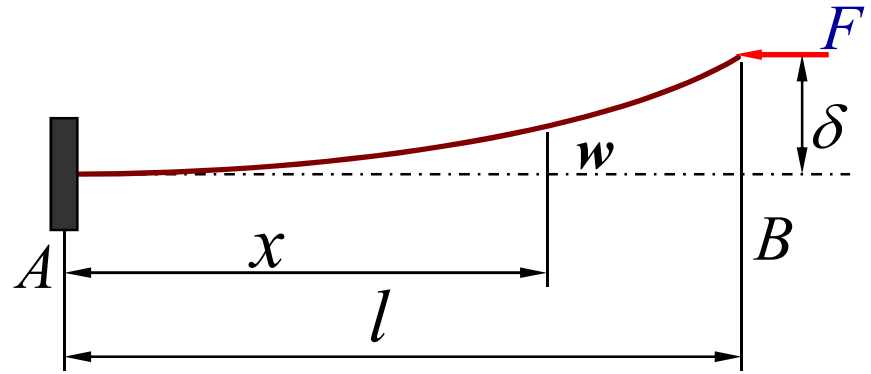


§ 9.3 其他支座条件下细长压杆的临界压力

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + k^2 w = k^2 \delta$$

通解:

$$w = A \sin kx + B \cos kx + \delta$$



考虑位移边界条件:

$$x = 0, w = 0, \implies B = -\delta$$

$$x = 0, \theta = \frac{dw}{dx} = 0 \implies Ak = 0 \quad \text{或} \quad A = 0$$

$$x = l, w = \delta \implies A \sin kl + B \cos kl + \delta = \delta$$

• 存在非零解的条件: $\cos kl = 0$



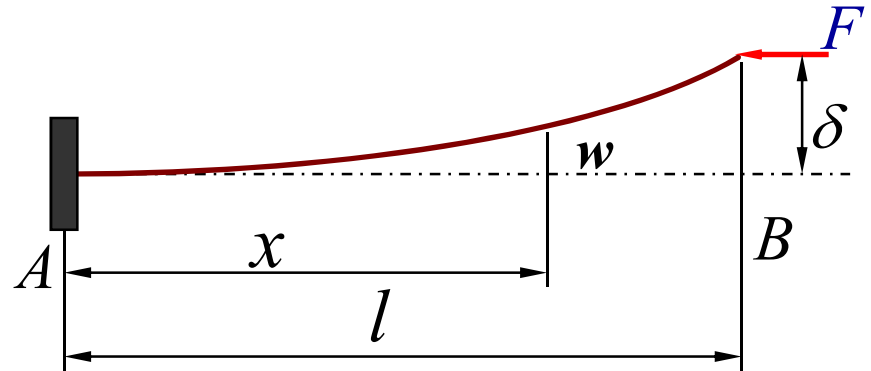


§ 9.3 其他支座条件下细长压杆的临界压力

• 存在非零解的条件:

$$\cos kl = 0$$

$$kl = \frac{(2n-1)\pi}{2} \quad (n=1, 2, \dots)$$



注意到: $k^2 = \frac{F}{EI}$ 得: $F = \frac{(2n-1)^2 \pi^2 EI}{(2l)^2}$

取 $n=1$, 得固支-自由压杆的临界载荷:

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(2l)^2}$$





§ 9.3 其他支座条件下细长压杆的临界压力

2. 一端固支一端铰支细长压杆的临界载荷

根据微弯临界平衡状态
建立微分方程

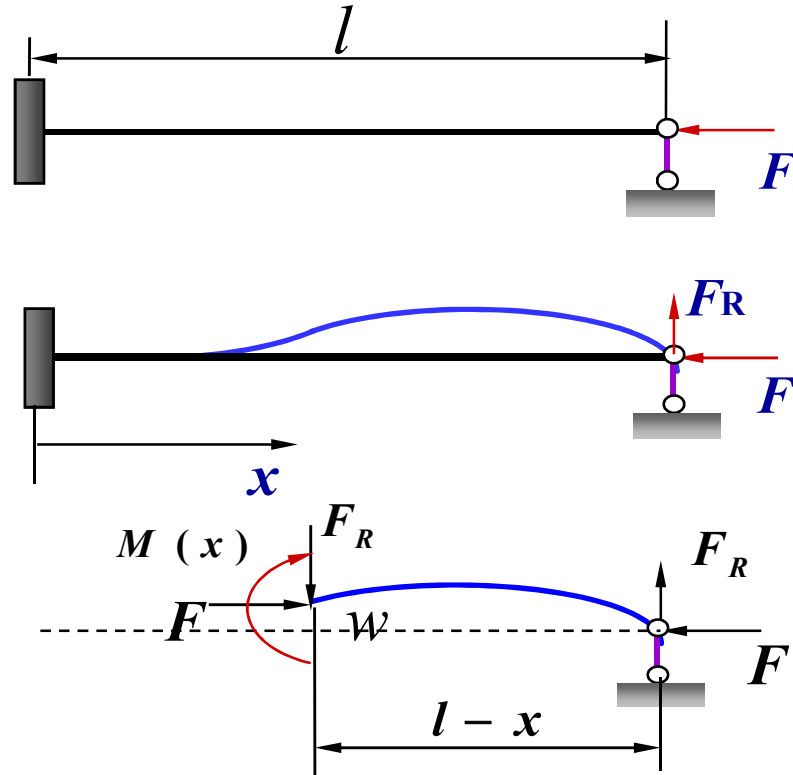
$$M(x) = -Fw + F_R(l - x)$$

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}$$

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{F}{EI} w = \frac{F_R}{EI} (l - x)$$

通解:

$$w = A \sin kx + B \cos kx + \frac{F_R}{EI k^2} (l - x) \quad \left(k^2 = \frac{F}{EI} \right)$$





§ 9.3 其他支座条件下细长压杆的临界压力

通解:

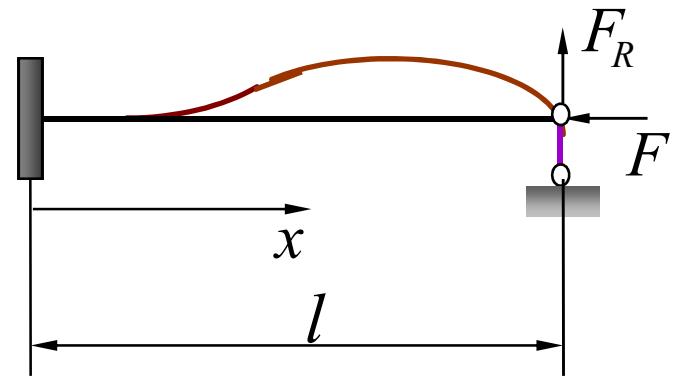
$$w = A \sin kx + B \cos kx + \frac{F_R}{EI k^2} (l - x) \quad (k^2 = \frac{F}{EI})$$

考虑位移边界条件:

$$x=0, w=0 \Rightarrow B + \frac{F_R l}{EI k^2} = 0$$

$$x=0, w'=0 \Rightarrow Ak - \frac{F_R}{EI k^2} = 0$$

$$x=l, w=0 \Rightarrow A \sin kl + B \cos kl = 0$$



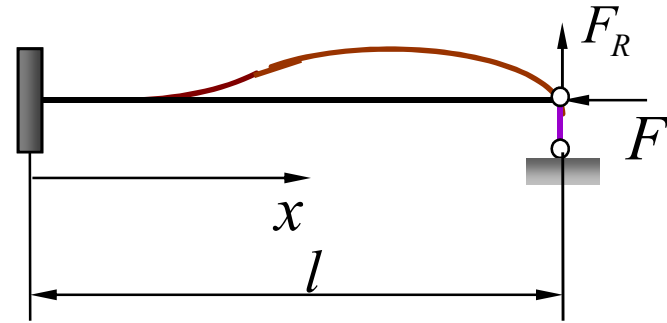


§ 9.3 其他支座条件下细长压杆的临界压力

$$B + \frac{F_R l}{EIk^2} = 0 \quad Ak - \frac{F_R}{EIk^2} = 0 \quad A \sin kl + B \cos kl = 0$$

• 存在非零解的条件:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \frac{l}{EIk^2} \\ k & 0 & -\frac{1}{EIk^2} \\ \sin kl & \cos kl & 0 \end{vmatrix} = 0$$



→ $\tan kl = kl$





§ 9.3 其他支座条件下细长压杆的临界压力

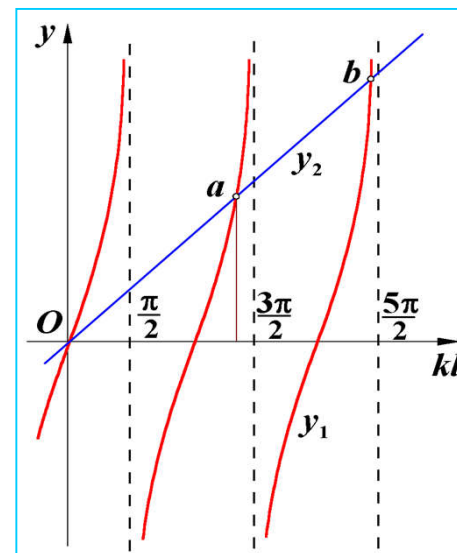
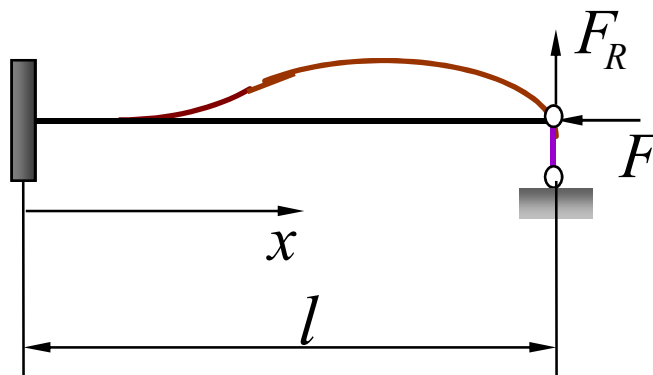
$$\tan kl = kl$$

$$y_1 = \tan kl \quad y_2 = kl$$

$$(kl)_a = 4.493$$

$$F = k^2 EI \quad \sqrt{\frac{F}{EI}} l = 4.493$$

$$F_{cr} = \frac{4.493^2 EI}{l^2} \approx \frac{\pi^2 EI}{(0.7l)^2}$$

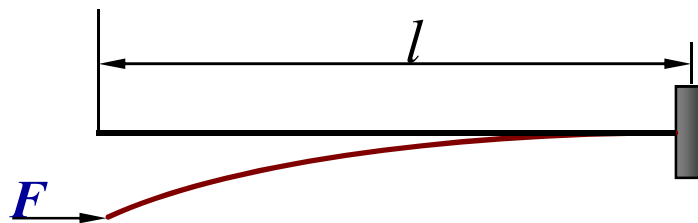




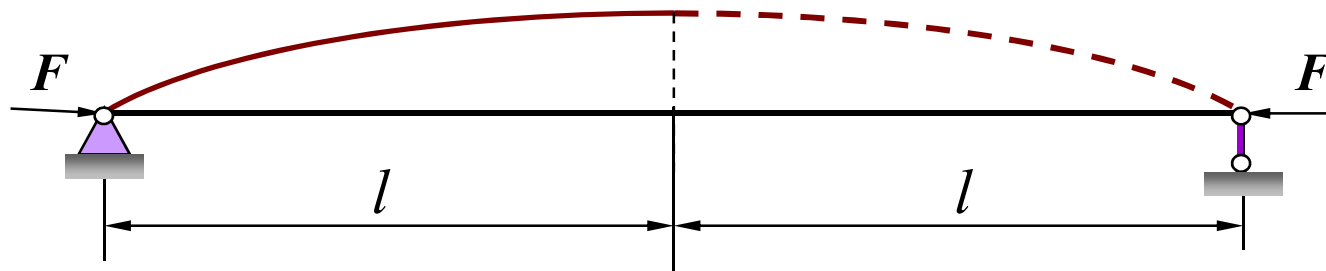
§ 9.3 其他支座条件下细长压杆的临界压力

二、类比法确定临界载荷

1. 一端固支一端自由：



观察：受力与变形与两端铰支压杆左半部分相同



类比：一端固支一端自由长 l 的压杆的临界载荷等于长 $2l$ 的对应铰支压杆的临界载荷。

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(2l)^2} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}$$

与解析法结果相同





§ 9.3 其他支座条件下细长压杆的临界压力

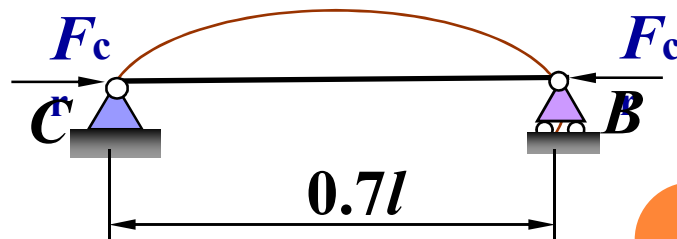
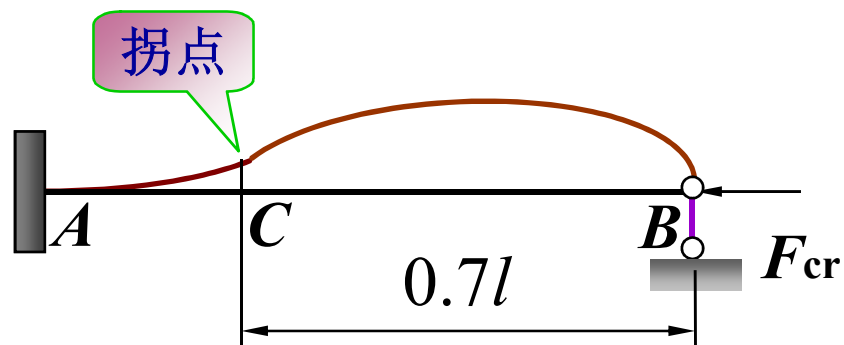
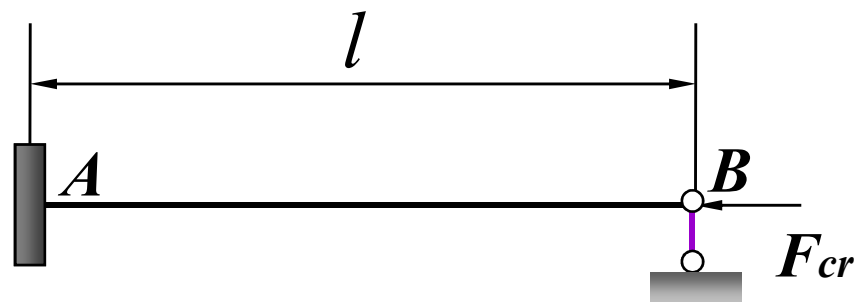
2. 一端固支、一端铰支

• 变形曲线观察：与B端相距约 $0.7l$ 处有一拐点C

• 类比：拐点C处弯矩为零，将C点坐标转动到变形前位置，BC段类比较支压杆。

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(0.7l)^2}$$

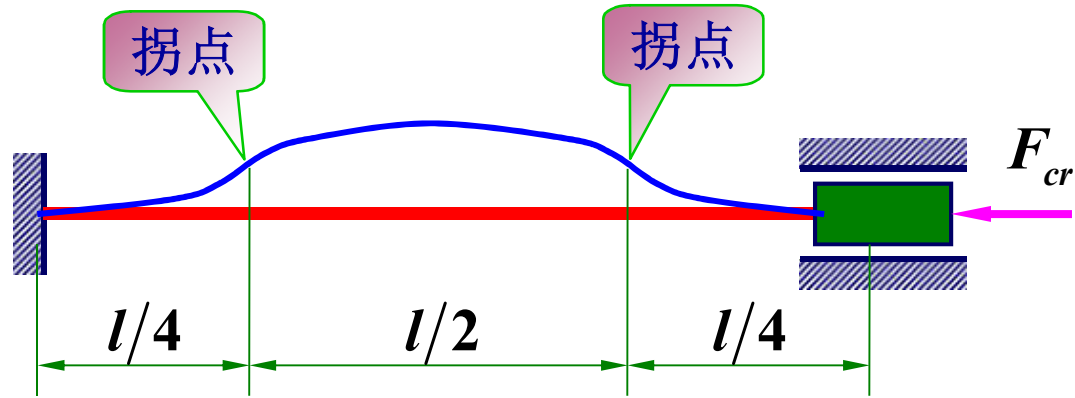
• 近似性讨论：由于变形后拐点C离开轴线，B处有约束反力，小变形条件下很小。



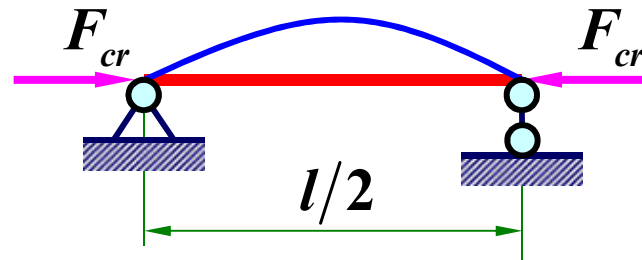


§ 9.3 其他支座条件下细长压杆的临界压力

3. 两端固支压杆:



$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(l/2)^2}$$





§ 9.3 其他支座条件下细长压杆的临界压力

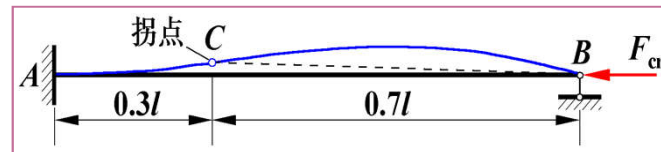
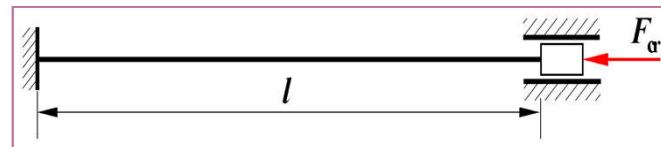
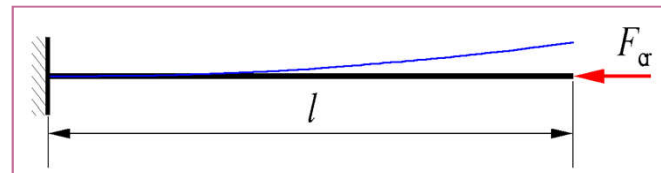
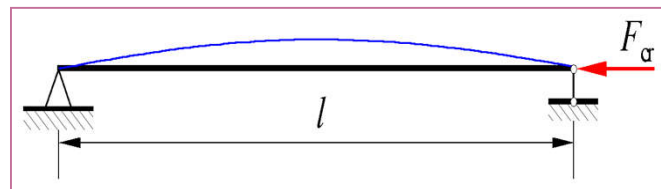
三、欧拉公式的统一表达式：

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad \mu = 1$$

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(2l)^2} \quad \mu = 2$$

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(l/2)^2} \quad \mu = \frac{1}{2}$$

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(0.7l)^2} \quad \mu = 0.7$$



欧拉公式可以写成统一形式：
$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}$$

μl ——相当长度：相当的两端铰支压杆的长度

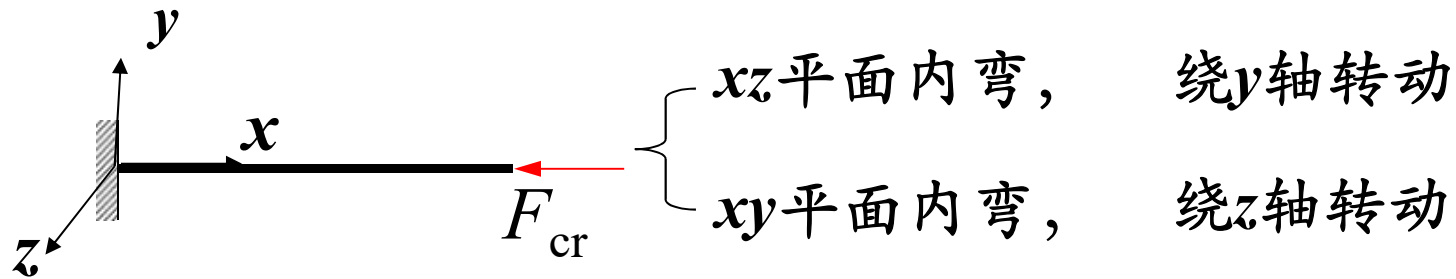
μ ——长度因数：支持方式对临界载荷的影响





§ 9.3 其他支座条件下细长压杆的临界压力

讨论：压杆为空间实体时，在轴向力作用下如果失稳，它朝哪个方向弯？



F_{cr} ——维持微弯平衡状态最小的压力。

各方向约束情况相同时：

μ 为常数， $I=I_{\min}$ ——最小形心主惯性矩

各方向约束情况不同时：

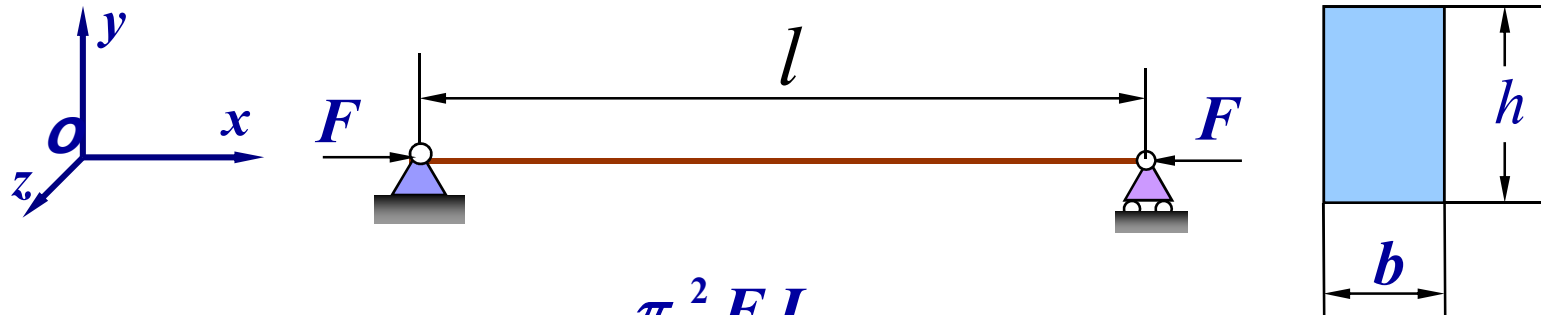
使 F_{cr} 最小的方向为实际弯曲方向， I 为弯曲时横截面对其中性轴的惯性矩。





§ 9.3 其他支座条件下细长压杆的临界压力

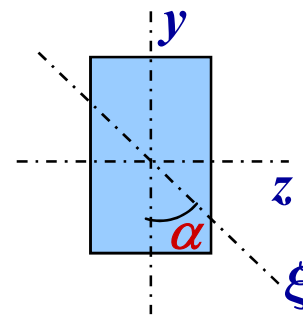
例：确定图示压杆的临界载荷($h > b$)



解：临界载荷
$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{\xi}}{l^2}$$

问题：结构在哪个平面内失稳？
临界载荷等于多少？

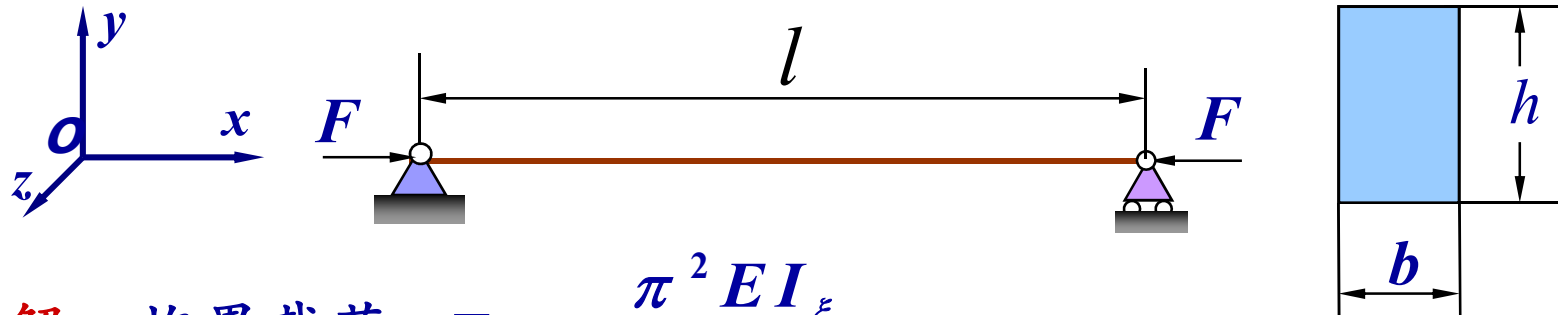
1. 当两端的约束是球形铰。
2. 当两端的约束是圆柱形铰，圆柱销轴线沿z轴。





§ 9.3 其他支座条件下细长压杆的临界压力

例：确定图示压杆的临界载荷($h > b$)



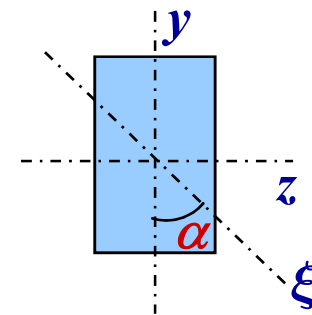
解：临界载荷 $F_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{\xi}}{l^2}$

1. 当两端的约束是球形铰。

$$I_{\xi} = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2} \cos 2\alpha - I_{yz} \sin 2\alpha$$

$$I_z = \frac{bh^3}{12} \quad I_y = \frac{hb^3}{12} \quad \text{压杆在 } x\text{-}z \text{ 平面内失稳}$$

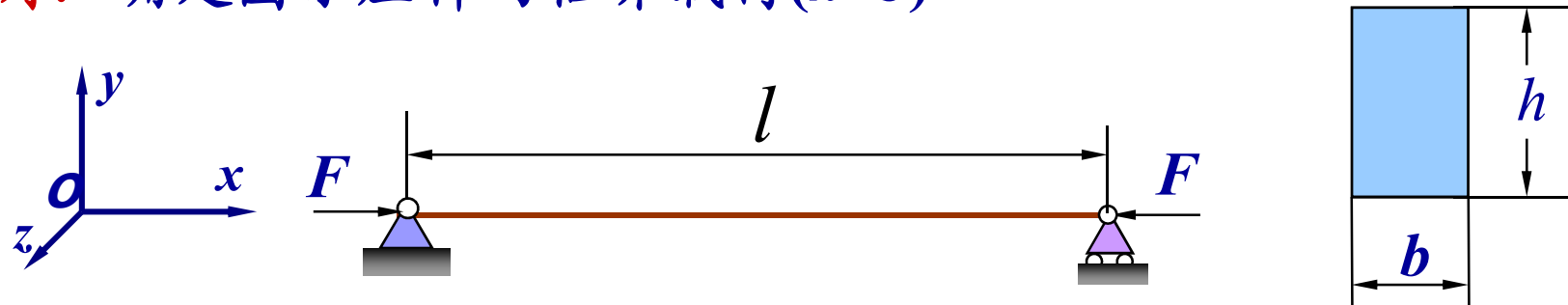
$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{\xi}}{l^2} = \frac{\pi^2 EI_y}{l^2} \quad \text{when } h > b$$





§ 9.3 其他支座条件下细长压杆的临界压力

例：确定图示压杆的临界载荷($h > b$)



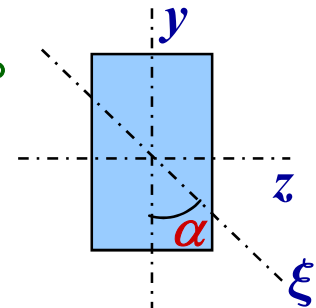
2. 当两端的约束是圆柱形铰，圆柱销轴线沿z轴。

$$\text{压杆在 } x-z \text{ 平面内, } F_{cr}^{(xz)} = \frac{\pi^2 EI_y}{(\mu l)^2}$$

$$\text{压杆在 } x-y \text{ 平面内, } F_{cr}^{(xy)} = \frac{\pi^2 EI_z}{l^2}$$

其中 $\mu = 0.5 \sim 1$, $I_y < I_x$

需要判断，杆件总沿临界载荷最小的方向失稳。



$$I_y = \frac{hb^3}{12}$$

$$I_z = \frac{bh^3}{12}$$



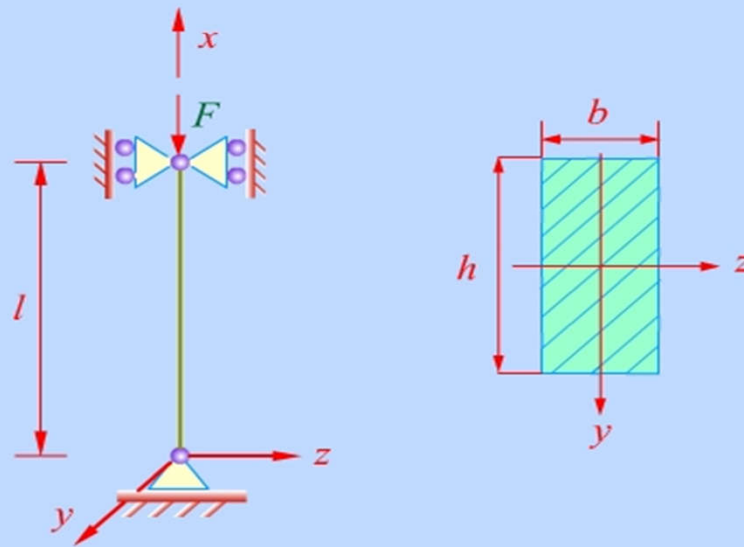


§ 9.3 其他支座条件下细长压杆的临界压力

讨论:

图示两端铰支压杆的截面为矩形，当其失稳时 B。

- (A) 临界压力 $F_{cr} = \pi^2 EI_y / l^2$ ，挠曲线位于xy面内；
- (B) 临界压力 $F_{cr} = \pi^2 EI_y / l^2$ ，挠曲线位于xz面内；
- (C) 临界压力 $F_{cr} = \pi^2 EI_z / l^2$ ，挠曲线位于xy面内；
- (D) 临界压力 $F_{cr} = \pi^2 EI_z / l^2$ ，挠曲线位于xz面内。

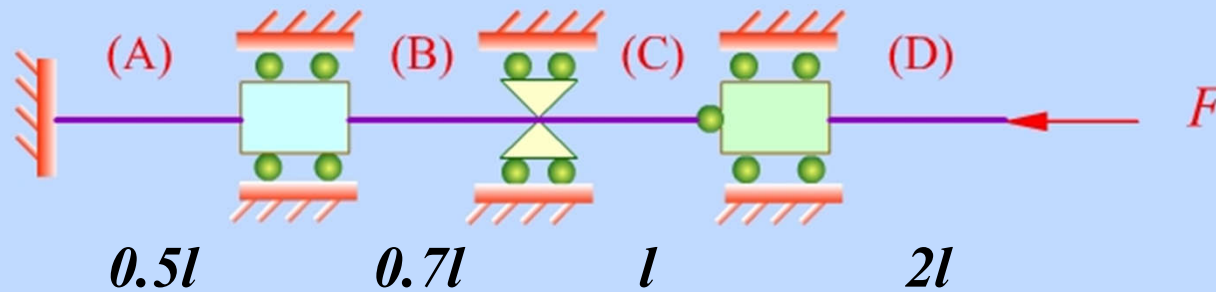




§ 9.3 其他支座条件下细长压杆的临界压力

讨论:

图示各段大柔度杆的长度、抗弯截面刚度均相同。在 F 力作用下，D段最先失稳。



$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}$$





湖南大学
HUNAN UNIVERSITY

作业

9.9, 9.10

