第3讲 系统模型与模型化

一 概述

二 解释结构模型方法(ISM)

一 概述

1 基本概念

模型——对现实系统抽象表达的结果。

应反映出系统的主要组成部分及相互关系。

模型有三个特征：

1. 它是现实世界部分的抽象或模仿；
2. 它是由那些与分析的问题有关的因素构成；
3. 它表明了有关因素间的相互关系。

模型化——为了描述系统的构成和行为，对实体系统的各种因素进行适当筛选后，用一定方式（数学、图像等）表达系统的过程和方法。在模型化中，要兼顾到模型的现实性和易处理性。

一 概述

2 模型化的本质、作用及地位

本质：利用模型与原型之间某方面的相似关系，在研究过程中用模型来代替原型，通过对于模型的研究得到关于原型的一些信息。

一 概述

2 模型化的本质、作用及地位

作用：①模型本身是人们对客体系统一定程度研究结果的表达。这种表达是简洁的、 形式化的。②模型提供了脱离具体内容的逻辑演绎和计算的基础，这会导致对科学规律、理论、原理的发现。③利用模型可以进行“思想”试验。

地位：模型的本质决定了它的作用的局限性。它不能代替以客观系统内容的研究，只有在和对客体系统相配合时，模型的作用才能充分发挥。

2 模型化的本质、作用及地位

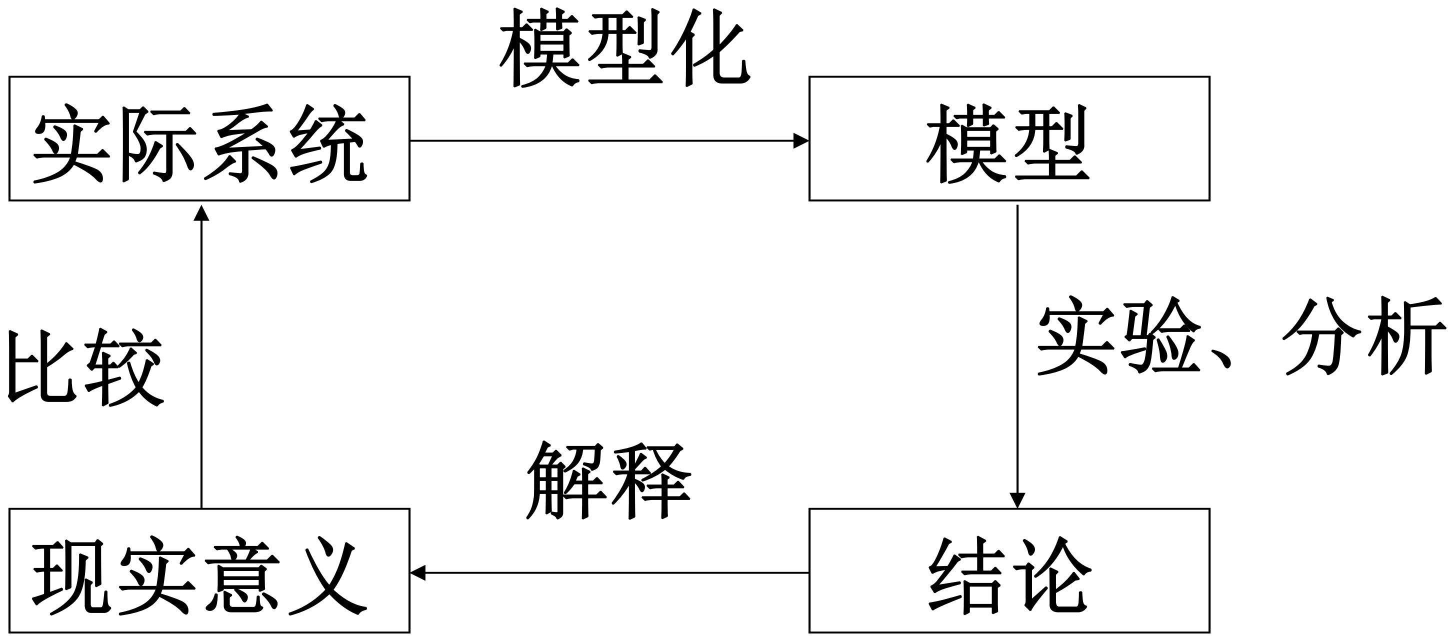


图　系统模型(化)的作用与地位

3 模型的分类

- 形象模型
  - 物理模型
  - 图像模型
- 抽象模型
  - 数学模型（动态、静态、确定性、随机性、线形、非线性、连续、离散等）
  - 图形模型（流程图、框图、流图、结构图等）
  - 概念模型（思维型、描述型、字句型）
  - 计算机程序

例：最优化问题

	甲产品	乙产品	资源/天
一车间	2天	1天	10
二车间	3天	3天	24
需要量	不限	7	
利润源	600元	400元	

Vmax=600X1+400X2

2X1+X2<=10

3X1+3X2<=24

X2<=7

X1,X2>=0

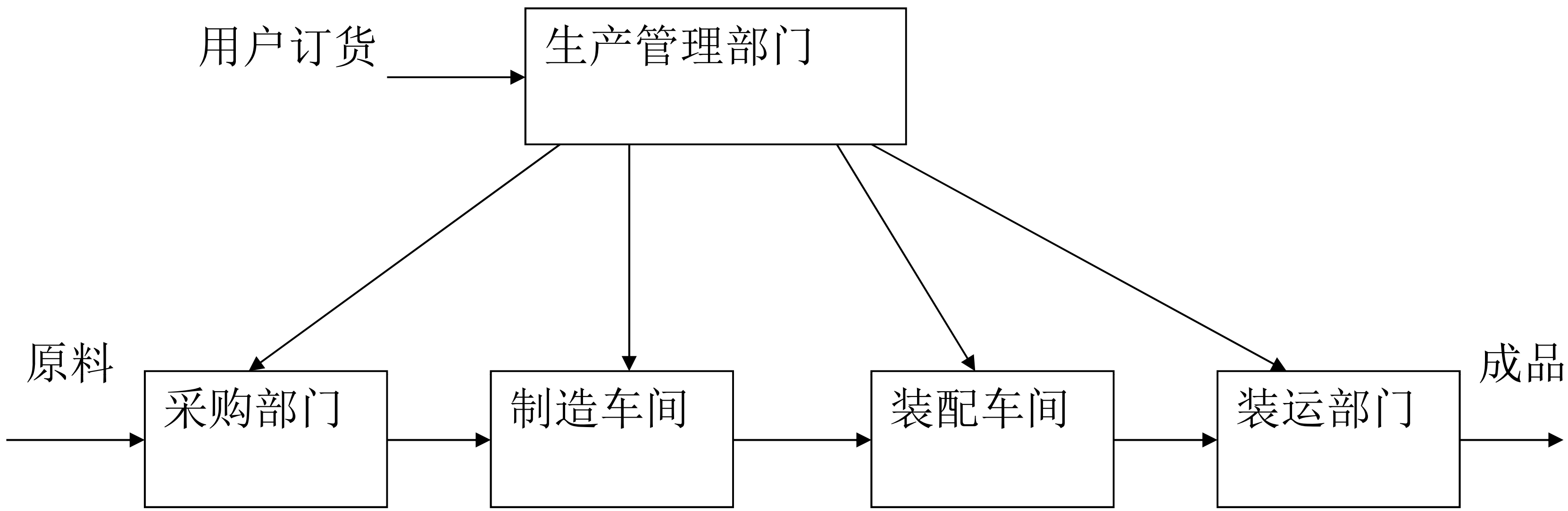
最优解X1=2，X2=6

Vmax=3600

一 概述

4 构造模型的一般原则

- 建立方框图。一个系统是由许多子系统组成的。建立方框图的目的是简化对系统内部相互作用的说明。用一个方框代表一个子系统。系统作为一个整体，可用子系统的连接来表示。这样，系统的结构就很清晰。下图所示的工厂系统，就是用方框图表示的一个例子。图中将每个车间（子系统）用一个方框来表示。每个方框有自己的输入和输出。图清楚表明了工厂系统的各个子系统的相互关系。



4 构造模型的一般原则

- 考虑信息相关性。模型中只应包括系统中与研究目的有关的那些信息。例如，在工业管理中，研究工艺流程对生产效率的影响时，就不需要考虑工人的工资。虽然，与研究目的无关的信息包括在模型中不会有什么害处，但它会增加模型的复杂性。所以，模型中只应包括有关的信息。

4 构造模型的一般原则

- 考虑准确性。建模时，对所收集的用以构模的信息应考虑其准确性。例如，在飞机系统中，飞行的精度是靠机身运动的表达式来描述。建模时，可以充分地认为机身是刚体，而且在结构上，机身的挠度也在许可的振动范围内。这样，就可在控制翼面运动和飞行方向间推导出很简单的关系，也可利用它估算燃料的消耗量。如果要考虑旅客舒适的要求，就需要考虑机身振动，需要对机身作详细的描述。

4 构造模型的一般原则

- 考虑结集性。建模时需要进一步考虑的因素是把一些个别的实体组成更大实体的程度。例如，在工厂系统中，图所示的描述形式能满足厂长的工作需要。但是，不能满足车间管理人员的需要，因为车间管理人员是把车间的每个工段作为一个单独的实体。对于活动的表示，也应考虑到结集性。例如，在导弹防护系统的研究中，有的项目并不需要对每次导弹发射进行详细计算，只要用概率函数表示多次发射所得到的结果就够了。

一 概述

5 建模的基本步骤

①明确建模的目的和要求。以便使模型满足实际要求，不致产生太大偏差；

②对系统进行一般语言描述。因为系统的语言描述是进一步确定模型结构的基础；

③寻找主要因素及其相互关系。以便使模型准确表示现实系统；

5 建模的基本步骤

④确定模型的结构。这一步决定了模型定量方面的内容；

⑤估计模型的参数。用数量来表示系统中的因果关系；

⑥实验研究。对模型进行实验研究，进行真实性检验，以检验模型与实际系统的符合性；

⑦必要修改。根据实验结果，对模型作必要的修改。

一 概述

6 模型化的基本方法

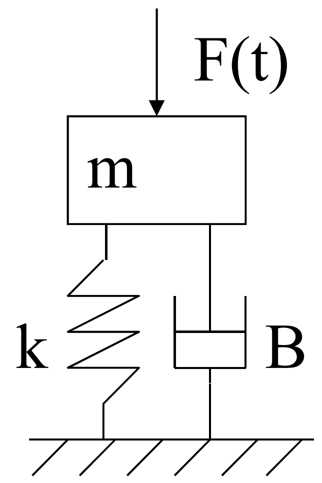
- 分析方法
- 实验方法
- 综合法
- Delphi法
- 辩证法

分析方法

分析解剖问题，深入研究客体系统内部细节（如结构形式、函数关系等）。利用逻辑演绎方法，从公理、定律导出系统模型。

例：如图所示力学装置，研究某物体运动规律

$$\begin{cases} f = ma \\ f = -(Bv + kx) + F(t) \end{cases}$$



整理得

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + B\frac{dx}{dt} + kx = F(t)$$

实验方法

通过对于实验结果的观察、分析，利用逻辑归纳法导出系统模型。数理模型方法是典型代表。

例：通过对于大量统计数据分析表明核武器杀伤力(k)与其命中精度(c)、威力(Y)的关系为，

$$k = Y^{\frac{2}{3}} / c^{2}$$

这样就构造了核武器杀伤力模型。

实验方法基本上包括三类①模拟法②统计数据分析③试验分析。

综合法

既重视实验数据又承认理论价值，将实验数据与理论推导统一于建模之中。实验数据与理论不可分。没有实验就建立不了理论。没理论指导难以得到有用的数据。

在实际工作中本方法是最常用的方法。通常是利用演绎方法从已知定理导出模型，对于某些不详之处，则利用实验方法来补充，利用归纳法从实验数据中搞清关系、建立模型。

例：从经济理论得知，由劳动力A和资本投入P得出产值Y，因此可知

$$Y = f(A, P)$$

这一步即是由理论推出模型结构。假设是相加（广义）关系，则

$$Y = cA^{\alpha}P^{\beta}$$

这里都是未知系数，利用统计数据就可以得出值来，得到一个Cobb－Douglas生产函数模型。

Delphi法

对于复杂的系统，特别是有人参与的系统，要利用以上方法建模是十分困难的。其原因就在于人们对于这样的系统认识不足，因此就必须采用Delphi等方法。通过专家们之间启发式地讨论、逐步完善对系统地认识，构造出模型来。这在社会系统规划、决策中是常用的方法。这种方法的本质在于集中了专家们对于系统的认识（包括直觉、印象等不肯定因素）及经验。通过实验修正，往往可以得到较好的效果。

辩证法

其基本的观点是：系统是一个对立统一体，是由矛盾的两方面构成的。矛盾双方相互转化与统一乃是真实情景。同时现象不一定是本质，形式不是内容。因此必须构成两个相反的分析模型。相同数据可以通过两个模型来解释。这样关于未来的描述和预测是两个对立模型解释的辩证发展的结果。因此可以防止片面性，最终结果优于单方面的结果。

一 概述

7 模型的简化

①减少变量，减去次要变量；例在物理中对碰撞的研究，假设物体是刚体，忽略了形变损失的力。

②改变变量性质；如变常数，连续变量离散化，离散变量连续化等变换方法。

③合并变量（集结）；例在做投入产出分析时，把各行业合并成工、农等产业部门。

④改变函数关系；如去掉影响不显著的函数关系（去耦、分解），将非线性化转化成线性化或用其它函数关系代替。

⑤改变约束条件。通过增加、修改或减少约束来简化模型。

二 系统结构模型化技术

(一) 结构分析的概念和意义

结构→结构模型→结构模型化→结构分析

结构分析是一个实现系统结构模型化并加以解释的过程。其具体内容包括：对系统目的--功能的认识；系统构成要素的选取；对要素间的联系及其层次关系的分析；系统整体结构的确定及其解释。系统结构模型化是结构分析的基本内容。

结构分析是系统分析的重要内容，是系统优化分析、设计与管理的基础.

二 系统结构模型化技术

(一) 系统结构的基本表达方式

系统的要素及其关系形成系统的特定结构。在通常情况下，可采用**集合、有向图和矩阵**等三种相互对应的方式来表达系统的某种结构。

1、系统结构的集合表达

设系统由n(n≥2)个要素(S1，S2，…，Sn)所组成，其集合为S，则有：**S={S1，S2，…，Sn}**

系统的诸多要素有机地联系在一起，并且一般都是以两个要素之间的二元关系为基础的。所谓二元关系是根据系统的性质和研究的目的所约定的一种需要讨论的、存在于系统中的两个要素(Si、Sj)之间的关系**Rij**(简记为R)。通常有影响关系、因果关系、包含关系、隶属关系以及各种可以比较的关系(如大小、先后、轻重、优劣等)。

1、系统结构的集合表达

二元关系是结构分析中所要讨论的系统构成要素间的基本关系，一般有以下三种情形：

Si与**Sj**间有某种二元关系**R**，即**SiRSj**；

Si与**Sj**间无某种二元关系**R**，即**Si** $\bar{R}$ Sj。

Si与**Sj**间的某种二元关系**R**不明，即**Si** $\tilde{R}$ **Sj**。

在通常情况下，二元关系具有传递性，即：若**SiRSj**、**SjRSk**，则有**SiRSk(Si**、**Sj**、**Sk**为系统的任意构成要素)。传递性二元关系反映两个要素的间接联系，可记作**Rt (t**为传递次数)，例如将**SiRSk**记作**SiR2Sk**。

有时，对系统的任意构成要素**Si**和**Sj**来说，既有**SiRSj**，又有**SjRSi**，这种相互关联的二元关系叫强连接关系。具有强连接关系的各要素之间存在替换性。

1、系统结构的集合表达

以系统要素集合S及二元关系的概念为基础，为便于表达所有要素间的关联方式，我们把系统构成要素中满足其中二元关系R的要素Si、Sj的要素对(Si，Sj)的集合，称为S上的二元关系集合，记作Rb，即有：

$Rb=\{(Si, Sj) \mid Si、Sj \in S, SiRSj, i、j=1, 2, \cdots, n\}$

且在一般情况下，(Si,Sj)和(Sj,Si)表示不同的要素对。

这样，“要素Si和Sj之间是否具有某种二元关系R”，也就等价于“要素对(Si,Sj)是否属于S上的二元关系集合Rb”。

至此，我们就可以用系统的构成要素集合S和在S上确定的某种二元关系集合Rb来共同表示系统的某种基本结构。

1、系统结构的集合表达

例1 某系统由七个要素(S1、S2、…S7)组成。经过两两判断认为：S2影响S1、S3影响S4、S4影响S5、S7影响S2、S4和S6相互影响。这样，该系统的基本结构可用要素集合S和二元关系集合Rb来表达，其中：

S={S1,S2,S3,S4,S5,S6,S7}

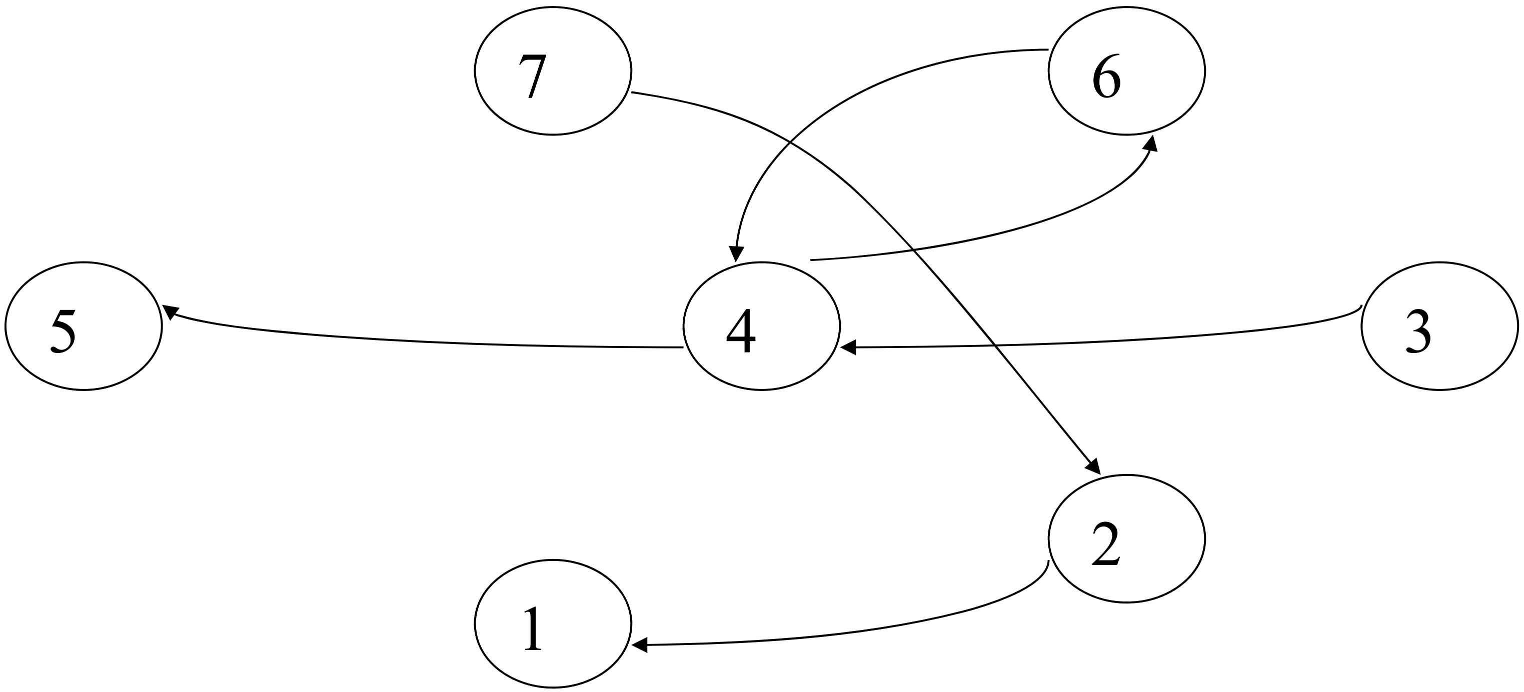
Rb={(S2,S1),(S3,S4),(S4,S5),(S7,S2),(S4,S6),(S6,S4)}

2、系统结构的有向图表达

有向图(D)由节点和连接各节点的有向弧(箭线)组成，可用来表达系统的结构。具体方法是：用节点表示系统的各构成要素，用有向弧表示要素之间的二元关系。从节点i(Si)到j(Sj)的最小(少)的有向弧数称为D中节点间通路长度(路长)，也即要素Si与Sj间二元关系的传递次数。在有向图中，从某节点出发，沿着有向弧通过其它某些节点各一次可回到该节点时，在D中形成回路。呈强连接关系的要素节点间具有双向回路。

2、系统结构的有向图表达

表达例1给出的系统要素及其二元关系的有向图如图所示。其中S3到S5、S3到S6和S7到S1的路长均为2。另外，S4和S6间具有强连接关系，S4和S6相互到达，在其间形成双向回路。



3、系统结构的矩阵表达

(1) 邻接矩阵

邻接矩阵(A)是表示系统要素间基本二元关系或直接联系情况的方阵。若 $A=(a_{ij})n\times n$，则其定义式为：

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & s_i R s_j \quad R\text{表示}s_i\text{与}s_j\text{有关系} \\ 0 & s_i \bar{R} s_j \quad \bar{R}\text{表示}s_i\text{与}s_j\text{没有关系}\end{cases}$$

例

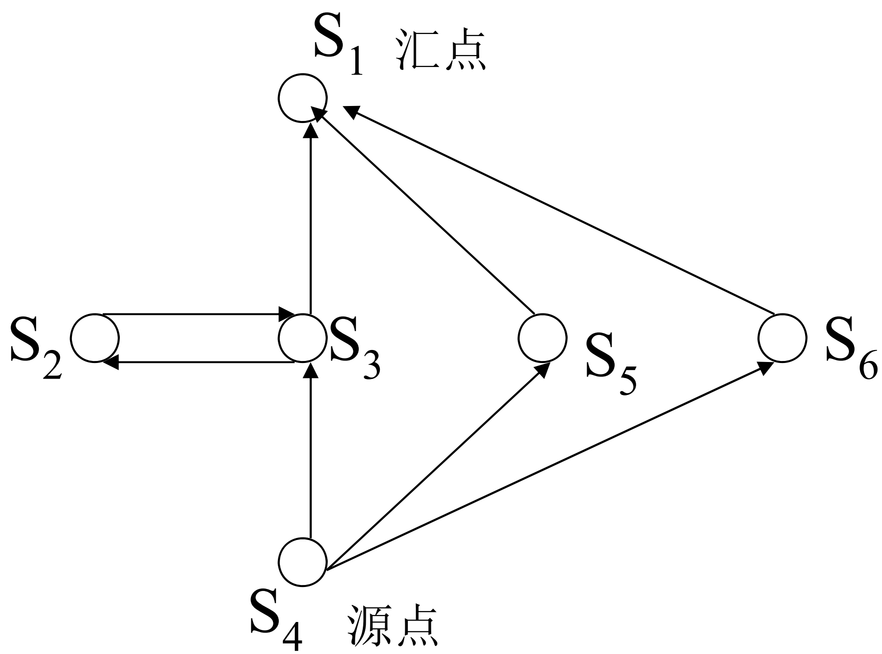
S={S1,S2,S3,S4,S5,S6,S7}

Rb={(S2,S1),(S3,S4),(S4,S5),(S7,S2),(S4,S6),(S6,S4)}

$$A = a_{ij} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

邻接矩阵示例

$$A = a_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



邻接矩阵特点

- 汇点：矩阵A中元素全为零的行所对应的节点
- 源点：矩阵A中元素全为零的列所对应的节点
- 对应每节点的行中，元素值为1的数量，就是离开该节点的有向边数；
- 列中1的数量，就是进入该节点的有向边数
- 邻接矩阵描述了系统各个要素两两之间的直接关系. $a_{ij}=1$ 表示从Si到Sj有一长度为1的通路,Si可以直接到达Sj.

(2) 可达矩阵R

- 可达矩阵R是指用矩阵形式来描述有向连接图各节点之间，经过一定长度的通路后可以到达的程度
- 推移律特性
- 可达矩阵R可用邻接矩阵A加上单位矩阵I，经过演算后求得. 例如上图. A1=A+I. A1描述了各节点间经过长度不大于1的通路后的可达程度.
- 设矩阵$A2=(A+I)^2=A1^2$，并运用布尔代数的运算规则，即：0+0=0, 0+1=1, 1+0=1, 1+1=1, 0×0=0, 0×1=0, 1×0=0, 1×1=1, 进行运算后可得到矩阵A2. 矩阵A2描述了各节点间经过长度不大于2的通路后的可达程度.

•依此类推，得到$A_1=(A+I)$ $A_2=(A+I)^2=A_1^2$ … $A_{r-1}=(A+I)^{r-1}=A_1^{r-1}$ 如：$A_1 \neq A_2 \neq \cdots \neq A_{r-1}=A_r$ $(r<=n-1)$ 则：$A_{r-1}=R$ 称为可达矩阵，表明各节点间经过长度不大于（r-1）的通路可以到达的程度，对于节点数为n的图，最长的通路其长度不超过（n-1），同时$R^2=R$.

$$A1=A+I=\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&1&1\\ 1&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&1&0&0&0\\ 1&1&1&0&0&0\\ 0&0&1&1&1&1\\ 1&0&0&0&1&0\\ 1&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

$$A2=（A+I）^2=\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0\\ 1&1&1&0&0&0\\ 1&1&1&0&0&0\\ 1&1&1&1&1&1\\ 1&0&0&0&1&0\\ 1&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

R=A2

(2) 可达矩阵R

- 上例继续运算,可得$A_2=A_3$. 所以 $R=A_2$

缩减可达矩阵

在可达矩阵中存在两个节点相应的行、列元素值分别完全相同，则说明这两个节点构成回路集，只要选择其中的一个节点即可代表回路集中的其他节点，这样就可简化可达矩阵，称为缩减可达矩阵。

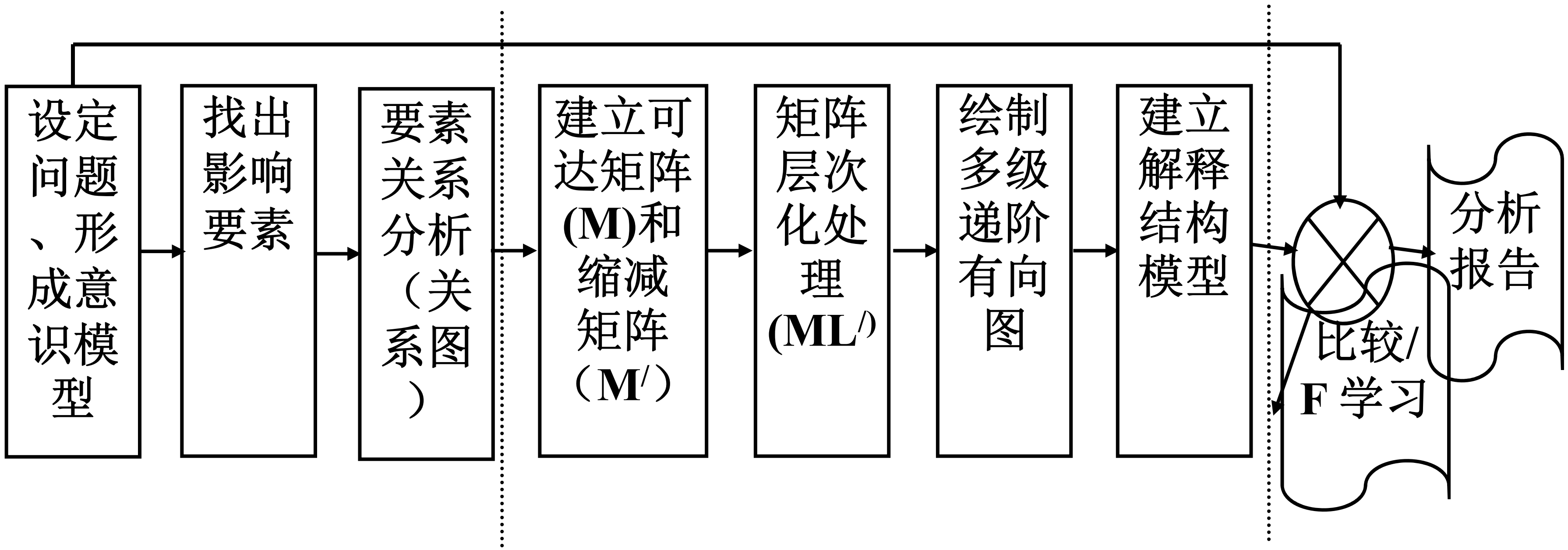
二　系统结构模型化技术

(二)解释结构模型法

- 解释结构模型法(ISM)是分析复杂的社会经济系统有关问题的一种行之有效的方法，其特点是把复杂的系统分解为若干子系统或要素，利用人的实践经验和知识，以及电子计算机的帮助，最终将系统构成一个多级递阶的结构模型。

二　系统结构模型化技术

（二）ISM实用化方法原理



解释结构模型法的工作程序

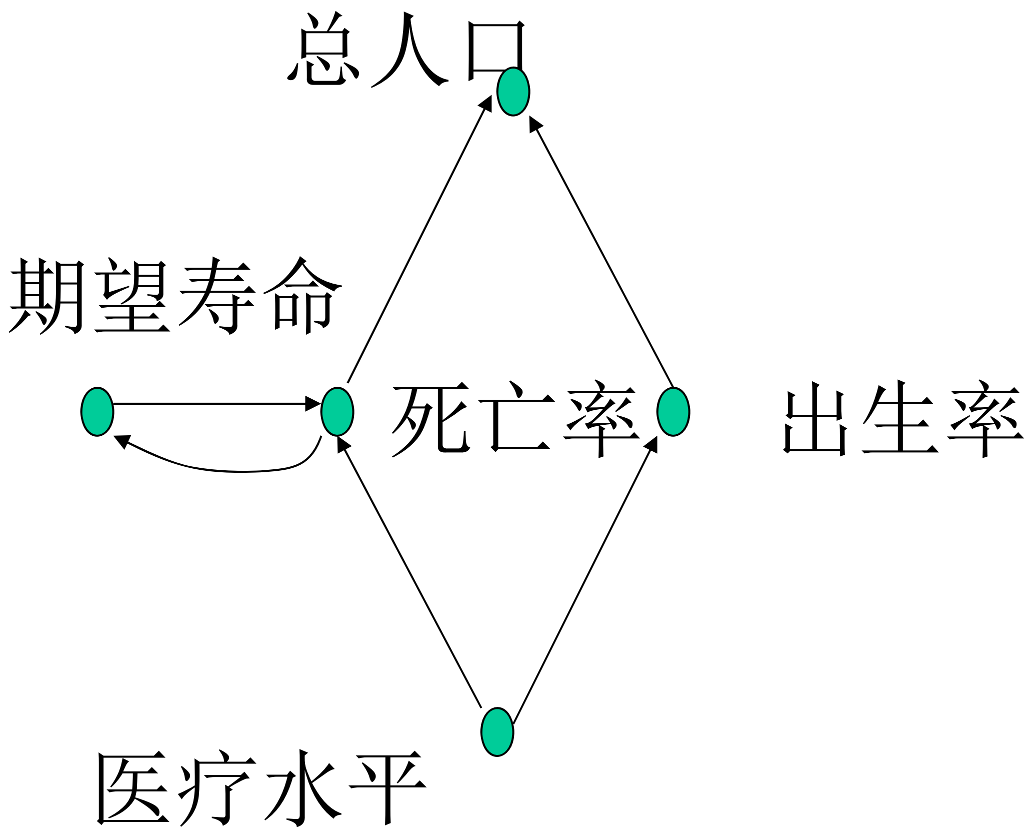
- 成立一个实施解释结构模型法的小组
- 设定问题
- 选择构成系统的要素
- 建立邻接矩阵和可达矩阵
- 对可达矩阵进行分解之后建立系统的结构模型
- 根据结构模型建立解释结构模型

建立邻接矩阵和可达矩阵

1. 邻接矩阵建立$A=(a_{ij})$

- $S_i \times S_j$ ，即S_i与S_j和S_j和S_i互有关系,
- $S_i \bigcirc S_j$，即S_i与S_j和S_j和S_i均无关系,
- $S_i \wedge S_j$，即S_i与S_j有关，S_j和S_i无关,
- $S_i \vee S_j$，即S_i与S_j无关，S_j和S_i有关,

示例



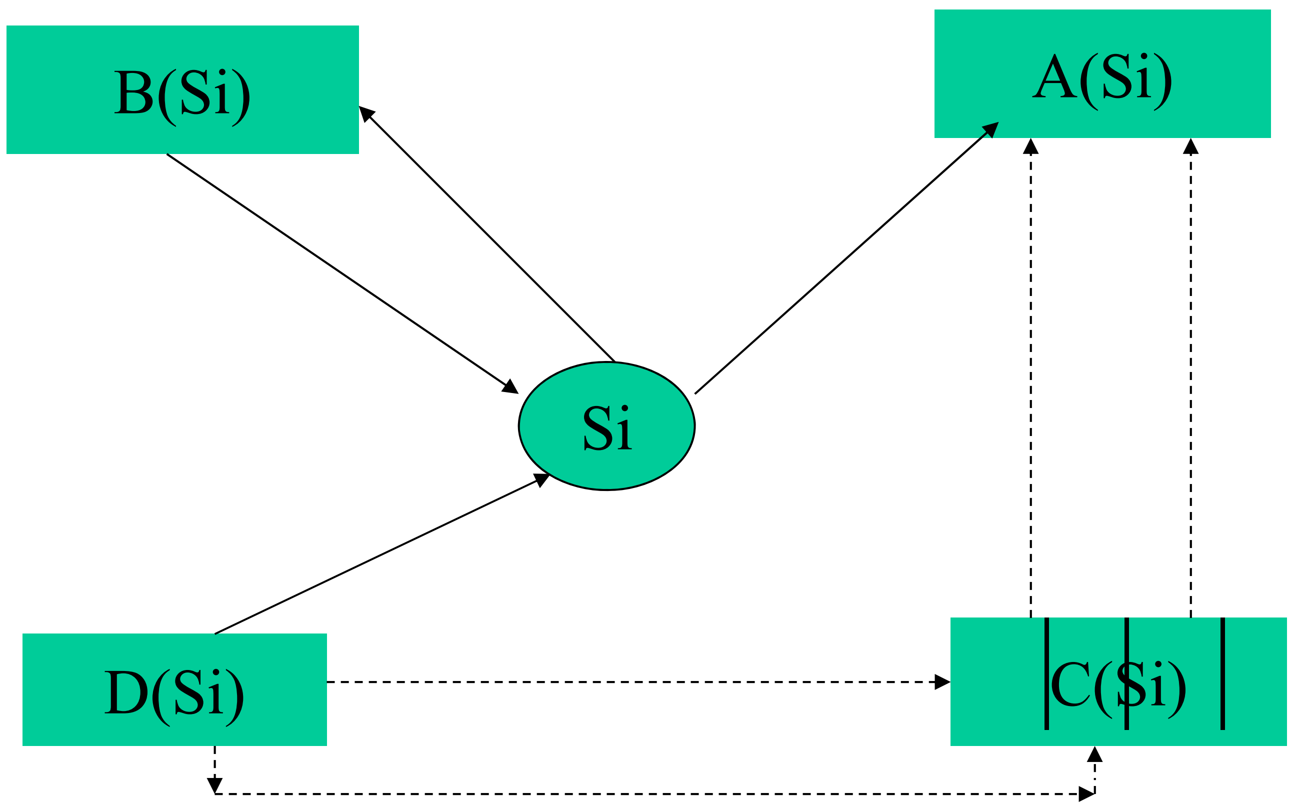
总人口

	总人口S1	出生率S2	死亡率S3	医疗水平S4	期望寿命S5
S1	0	0	0	0	0
S2	1	0	0	0	0
S3	1	0	0	0	1
S4	1	1	1	1	1
S5	1	0	1	0	0

建立可达矩阵

- 选择一个能够承上启下的要素S_i,将其他要素分为：
  - A(S_i)----没有回路的上位集，　由S_i 可达它，反之不能
  - B （S_i)----有回路的上位集，由S_i 可达它，反之也可达
  - C （S_i)—无关集，　S_i 与C （S_i)中要素完全无关
  - D （S_i)----下位集，由D （S_i)可达S_i ，反之不可达的集合

S_i与其他要素的关系



可达矩阵的建立

- **$R=(r_{ij})$；当 S_iRS_j则$r_{ij}=1$,否则$r_{ij}=0$**

	A	B	i	C	D
A	M_{AA}	0	0	0	0
B	1	1	1	0	0
I	1	1	1	0	0
C	M_{CA}	0	0	M_{CC}	0
D	1	1	1	M_{DC}	M_{DD}

M_{AA}、M_{CC}、M_{DD}是降了阶的可达矩阵；M_{DC}、M_{CA}是相互作用矩阵，需进一步求解

结构模型的建立

- 可达集：要素S_i 可以到达的要素集合定义为要素S_I的可达集，用$R(S_i)$表示，由可达矩阵中第S_I 行中所有矩阵元素为1的列所对应的要素集合。
- 前因集：将到达要素S_I 的要素集合定义为要素S_I 的前因集，用$A(S_i\ )$表示，由可达矩阵中第S_I 列中的所有矩阵元素为1的行所对应的要素组成。
- 交集:系统要素Si的交集是Si在可达集和前因集的共同部分，记为C(Si)。其定义式为： $C(Si)= R(Si)\ \cap\ A(Si)$
- 共同集合:要素Si的交集为前因集A(Si)的所有要素集合定义为共同集合.其定义为 $T=\{Si\in N|R(Si)\ \cap\ A(Si)=A(Si)\}$
- 最高级要素集：一个多级递阶结构的最高级要素集，是指没有比它再高级别的要素可以到达。其可达集$R(S_I)$中只包含它本身的要素集,而前因集中，除包含要素S_I 本身外，还包括可以到达它下一级的要素。
- 若$R(S_I)=R(S_I)\cap A(S_I\ )$， 则$S_I$ 即为最高级要素集。

建立递阶结构模型的规范方法

- 区域划分：系统分为有关系的几个部分或子部分；共同集T为$A(S_I)=R(S_I)\cap A(S_I)$，n_i和n_j在同一部分内，他们的可达集有共同的单元
- 级间划分. 区域内的级位划分，即确定某区域内各要素所处层次地位的过程 .
- 强连同块划分
- 缩减可达矩阵

级间划分

- 找出整个系统要素集合的最高级要素后，可将它们去掉，再求剩余要素集合的最高级要素，依次类推，直到确定出最低一级要素集合。
- 为此，令$L_0=\Phi$(最高级要素集合为L_1，没有零级要素)，则有：
- $L_1=\{S_i|S_i\in P-L_0, C_0(S_i)=R_0(S_i), i=1,2,\ldots,n\}$
- $L_2=\{S_i|S_i\in P-L_0-L_1, C_1(S_i)=R_1(S_i), i<n=$
- $L_k=\{S_i|S_i\in P-L_0-L_1-\ldots-L_{k-1}, C_{k-1}(S_i)=R_{k-1}(S_i)\}$

$$
R = \begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
$$

T={1,6,7}

R(1) $\cap$ R(6)$\cap$R(7) $\neq \not\subset$

L1= {3}

要素	R(Si)	A(Si)	R(Si) ∩A(Si)
1	1,2,3,5,8	1	1
2	2,3	1,2,4,5,6,7,8	2
3	3	1,2,3,4,5,6,7,8	3
4	2,3,4	4,6,7	4
5	2,3,5,8	1,5,8	5,8
6	2,3,4,6	6	6
7	2,3,4,7	7	7
8	2,3,5,8	1,5,8	5,8

要素	R(Si)	A(Si)	R(Si) ∩A(Si)
1	1,2,5,8	1	1
2	2	1,2,4,5,6,7,8	2
4	2,4	4,6,7	4
5	2,5,8	1,5,8	5,8
6	2,4,6	6	6
7	2,4,7	7	7
8	2,5,8	1,5,8	5,8

L2= {2}

要素	R(Si)	A(Si)	R(Si) ∩A(Si)
1	1,5,8	1	1
4	4	4,6,7	4
5	5,8	1,5,8	5,8
6	4,6	6	6
7	4,7	7	7
8	5,8	1,5,8	5,8

L3= {4,5,8}

要素	R(Si)	A(Si)	R(Si) ∩A(Si)
1	1	1	1
6	6	6	6
7	7	7	7

L4= {1,6,7}

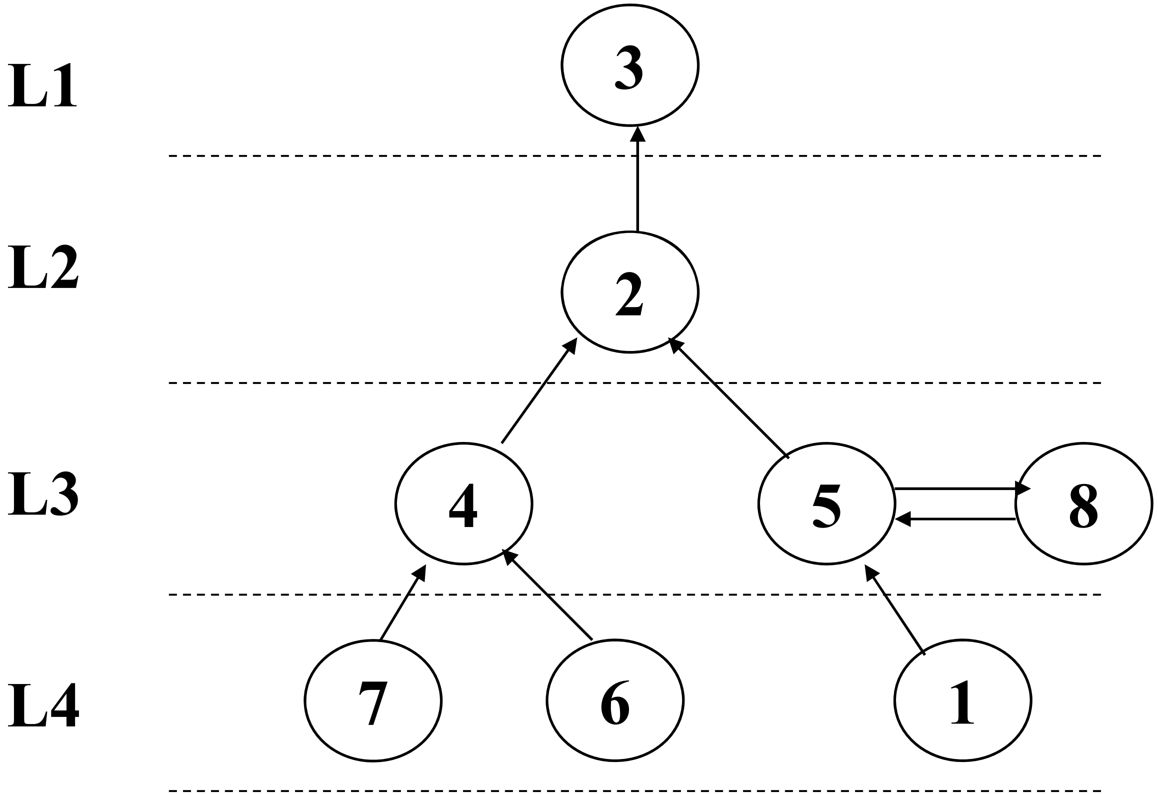
按级间顺序排列的可达矩阵

$$
R1=\begin{array}{c}
S3\\ S2\\ S4\\ S5\\ S8\\ S1\\ S6\\ S7
\end{array}
\begin{pmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&0&0&0&0&0\\
1&1&0&1&1&0&0&0\\
1&1&0&1&1&0&0&0\\
1&1&0&1&1&1&0&0\\
1&1&1&0&0&0&1&0\\
1&1&1&0&0&0&0&1
\end{pmatrix}
$$

强连同块划分
缩减可达矩阵

$$R1' = \begin{array}{c} S3 \\ S2 \\ S4 \\ S5 \\ S1 \\ S6 \\ S7 \end{array} \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0 \\ 1&1&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&0&0&0&0 \\ 1&1&0&1&0&0&0 \\ 1&1&0&1&1&0&0 \\ 1&1&1&0&0&1&0 \\ 1&1&1&0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

绘制结构模型



例2

$$R=\begin{array}{c} S1 \\ S2 \\ S3 \\ S4 \\ S5 \\ S6 \\ S7 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

结构模型建立

- 主要分析层次之间要素之间的关系
- 绘制系统的结构模型

例3 某研究院科研技术装备的管理问题

- 成立ISM小组
- 确定关键问题及导致因素,列举个因素的相关性

关键问题:科研技术装备的管理职能未有效发挥作用		S0
导致因素		
1	对管理地位的认识不明确,思想认识不到位	S1
2	缺乏系统化全过程综合管理的思想	S2
3	主管机构工作跟不上,管理中心作用不突出	S3
4	各相关管理部门职责不明确,协调配合差	S4
5	组织管理系统部健全,综合管理作用与职能受影响	S5
6	管理人员素质跟不上工作发展的需要	S6
7	管理方法手段不科学	S7
8	管理者参与高层管理力度受限,权威性差	S8
9	管理基础工作薄弱,信息传递不畅	S9
10	管理规章制度与程序不健全	S10
11	管理部门检查监督力度不够	S11
12	管理组织机构设置不合理	S12

可达矩阵

	S_0	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}	S_{11}	S_{12}
S_0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
S_1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
S_2	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
S_3	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
S_4	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
S_5	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0
S_6	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
S_7	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
S_8	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
S_9	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0
S_{10}	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0
S_1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
S_{12}	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1

3. 对可达矩阵进行级间划分并建立结构模型

寻找各级的最高级要素集
——第一级的可达集与前因集

S_I	$R(S_J)$	$A(S_J)$	$R \cap A$
S_O	*0*	*0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12*	*0*
S_1	0,1	1,6	1
S_2	0,2	2,6	2
S_3	0,3	3,4,5,7,8,	3
S_4	0,3,4	4,10,12	4
S_5	0,3,5	5,10,12	5
S_6	0,1,2,6,7,8	6	6
S_7	0,3,7	6,7,12	7
S_8	0,3,8	6,8,12	8
S_9	0,9,11	9,10,12	9
S_{10}	0,4,5,9,10	10,	10
S_{11}	0,11	5,9,11	11
S_{12}	0,4,5,7,8,9,12	12	12

第一级：S_0

第二级的可达集与前因集

S	R(SI)	A(Si)	R∩A
S_1	1	1,6	1
S_2	2	2,6	2
S_3	3	3,4,5,7,8	3
S_4	3,4	4,10,12	4
S_5	3,5	5,10,12	5
S_6	1,2,6,7,8	6	6
S_7	3,7	6,7,12	7
S_8	3,8	6,8,12	8
S_9	9,11	9,10,12	9
S_{10}	4,5,9,10	10	10
S_{11}	11	5,9,11	11
S_{12}	4,5,7,8,9,12	12	12

- 第二级S_1，S_2，S_3，S_{11}

第三级的可达集与前因集

S_I	R(SI)	A(SJ)	R∩A
S_4	4	4,10,12	4
S_5	5	5,10,12	5
S_6	6,7,8	6	6
S_7	7	6,7,12	7
S_8	8	6,8,12	8
S_9	9	9,10,12	9
S_{10}	4,5,9,10	10	10
S_{12}	4,5,7,8,9,12	12	12

- 第三级：S_4，S_s，S_7，S_8，S_9

第四级的可达集与前因集

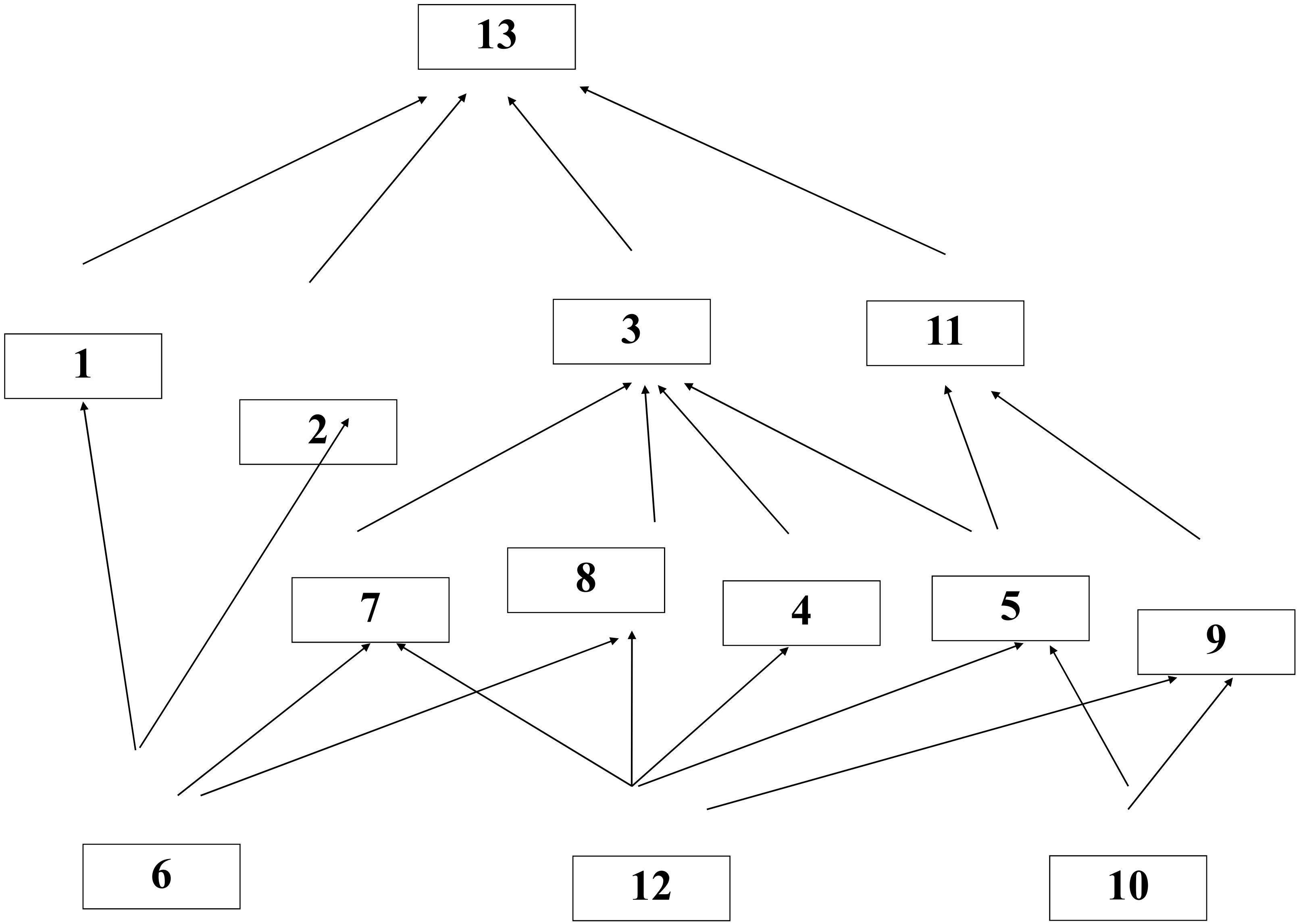
S_I	R(SI)	A(SJ)	R∩A
S_6	6	6	6
S_{10}	10	10	10
S_{12}	12	12	12

- 第四级S_6，S_{10}，S_{12}；

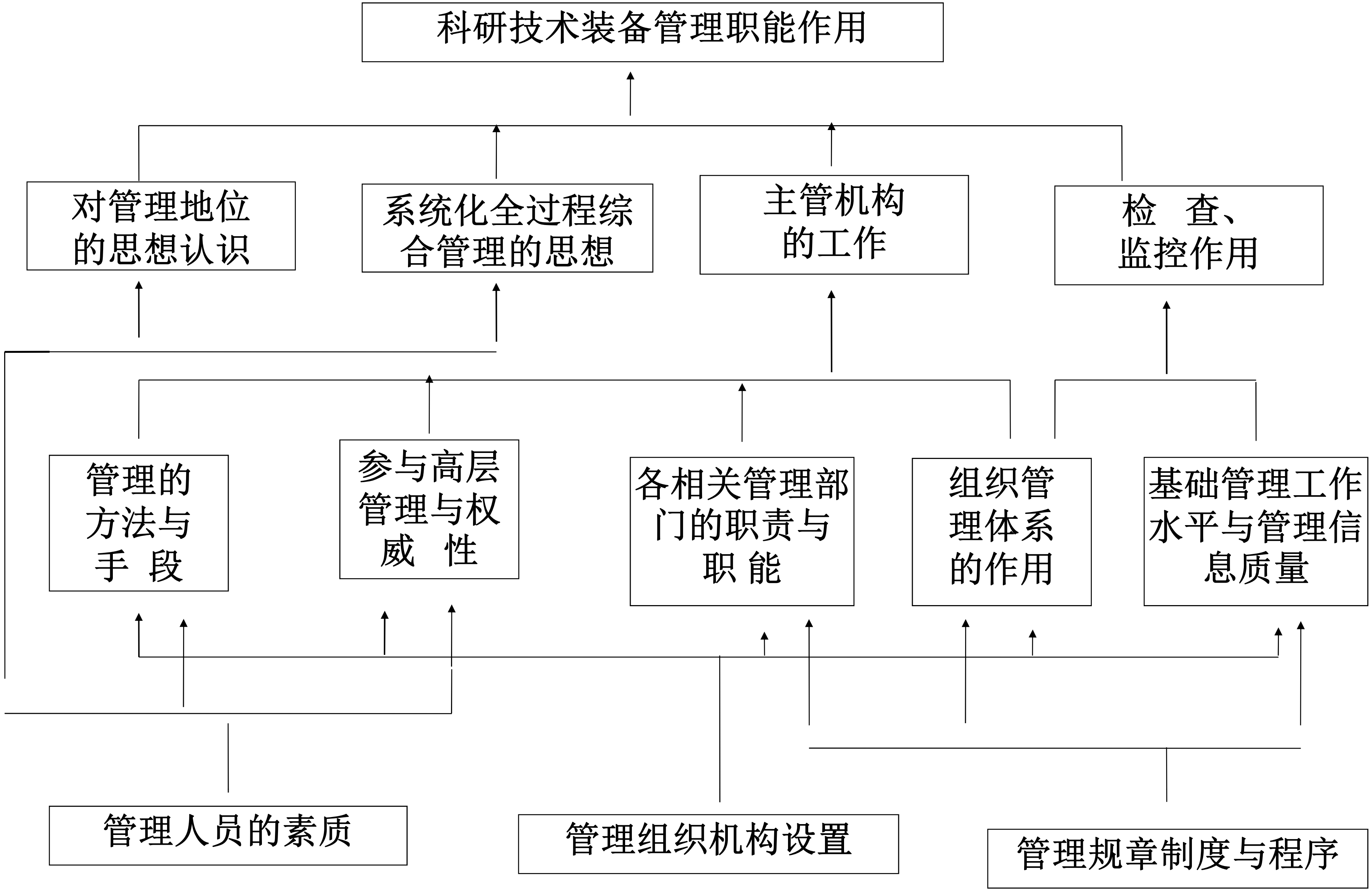
级间排序的可达矩阵

	S_0	S_1	S_2	S_3	S_{11}	S_4	S_5	S_7	S_8	S_9	S_6	S_{10}	S_{12}
S_0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
S_1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
S_2	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
S_3	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
S_{11}	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
S_4	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
S_5	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0
S_7	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
S_8	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
S_9	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0
S_6	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0
S_{10}	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0
S_{12}	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1

结构模型



解释结构模型



科研技术装备管理职能作用
对管理地位的思想认识
系统化全过程综合管理的思想
主管机构的工作
检　查、监控作用
管理的方法与手　段
参与高层管理与权威　性
各相关管理部门的职责与职 能
组织管理体系的作用
基础管理工作水平与管理信息质量
管理人员的素质
管理组织机构设置
管理规章制度与程序

ISM的缺陷

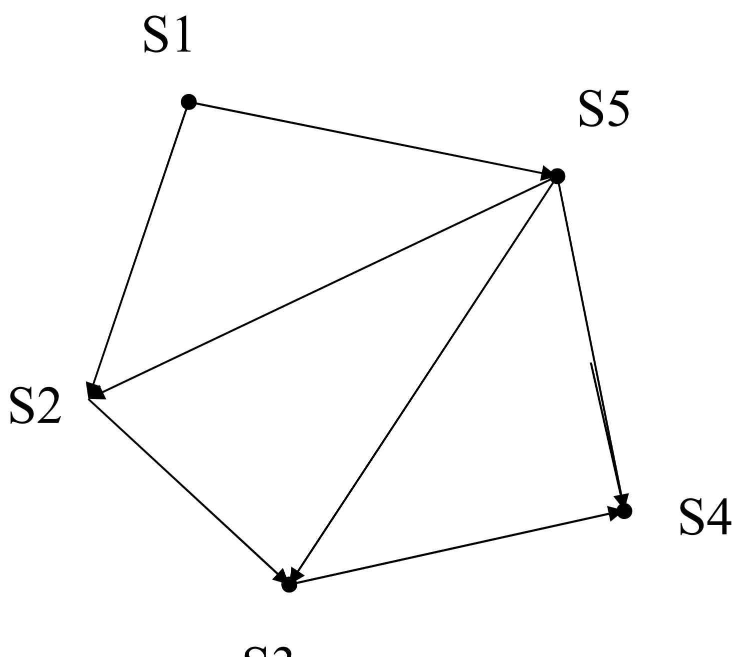
- 推移规律的假定，级与级之间不存在反馈回路
- 系统各要素逻辑关系的确定，依赖人们的主观经验
- 实施过程中需要三种角色人员：方法技术专家、参与者、协调人

思考题

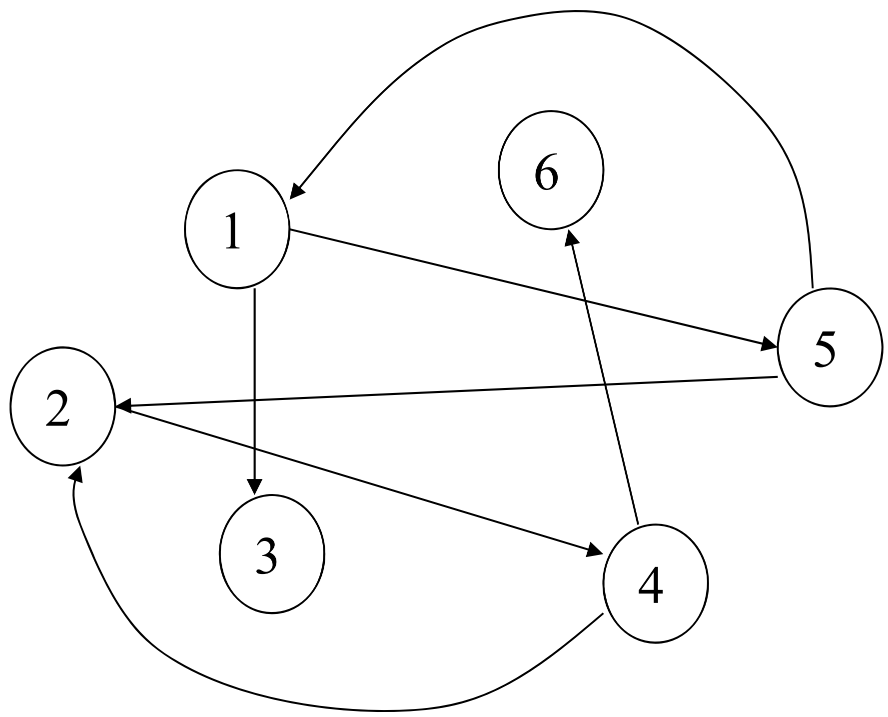
- 试用ISM技术研究本专业各门主要课程之间的关系(假定二元关系为“支持”关系)，建立你认为比较合理的课程体系结构。
- 给定描述系统基本结构的有向图如(a)、(b)所示。要求：

(1)写出系统要素集合S及S上的二元关系集合Rb；

(2)建立邻接矩阵A、可达矩阵M及缩减矩阵M′。



(a)



(b)

三、 主成分分析方法

- 主成分分析的基本原理
- 主成分分析的计算步骤
- 主成分分析方法应用实例

问题的提出：

系统由多要素组成，多变量问题是经常会遇到的。变量太多，无疑会增加分析问题的难度与复杂性，而且在许多实际问题中，多个变量之间是具有一定的相关关系的。

因此，人们会很自然地想到，能否在相关分析的基础上，用较少的新变量代替原来较多的旧变量，而且使这些较少的新变量尽可能多地保留原来变量所反映的信息？

事实上，这种想法是可以实现的，主成分分析方法就是综合处理这种问题的一种强有力的工具。

主成分分析是把原来多个变量划为少数几个综合指标的一种统计分析方法。

从数学角度来看，这是一种降维处理技术。

1、主成分分析的基本原理

- 假定有n个样本，每个样本共有p个变量，构成一个$n \times p$阶的数据矩阵

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix} \quad （3.5.1）$$

- 当p较大时，在p维空间中考察问题比较麻烦。为了克服这一困难，就需要进行降维处理，即用较少的几个综合指标代替原来较多的变量指标，而且使这些较少的综合指标既能尽量多地反映原来较多变量指标所反映的信息，同时它们之间又是彼此独立的。

主成分分析就是将**p**个观测变量综合成为**m**个新的变量（综合变量）。

定义：记x_1，x_2，…，x_p为原变量指标，z_1，z_2，…，z_m（$m \le p$）为新变量指标

$$
\begin{cases}
z_1 = l_{11}x_1 + l_{12}x_2 + \cdots + l_{1p}x_p \\
z_2 = l_{21}x_1 + l_{22}x_2 + \cdots + l_{2p}x_p \\
\qquad \vdots \\
z_m = l_{m1}x_1 + l_{m2}x_2 + \cdots + l_{mp}x_p
\end{cases}
\qquad (3.5.2)
$$

■系数l_{ij}的确定原则：

（1）z_i与z_j（$i \ne j$；i，j=1，2，…，m）相互无关；

（2）z_1是x_1，x_2，…，x_P的一切线性组合中方差最大者，z_2是与z_1不相关的x_1，x_2，…，x_P的所有线性组合中方差最大者；

……

z_m是与z_1，z_2，……，z_{m-1}都不相关的x_1，x_2，…x_P，的所有线性组合中方差最大者。

（3） $$l_{k1}^{\ 2} + l_{k2}^{\ 2} + \cdots + l_{kp}^{\ 2} = 1 \qquad k = 1,2,\cdots m.$$

则新变量指标z1，z2，…，zm分别称为原变量指标x1，x2，…，xP的第一，第二，…，第m主成分。

从以上的分析可以看出，主成分分析的实质就是确定原来变量x_j（j=1，2，…，p）在诸主成分z_i（i=1，2，…，m）上的荷载l_{ij}（i=1，2，…，m；j=1，2，…，p）。

上述模型可用矩阵表示为：

$$Z = LX$$

其中：

$$Z = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_m \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & \cdots & l_{1p} \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & l_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_{m1} & l_{m2} & \cdots & l_{mp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ lm \end{pmatrix}$$

从数学上可以证明，L是X的相关矩阵的*m*个较大的特征值所对应的特征向量。

2、主成分分析的几何解释

假设有 n 个样品，每个样品有二个变量，即在二维空间中讨论主成分的几何意义。设 n 个样品在二维空间中的分布大致为一个椭圆，如下图所示：

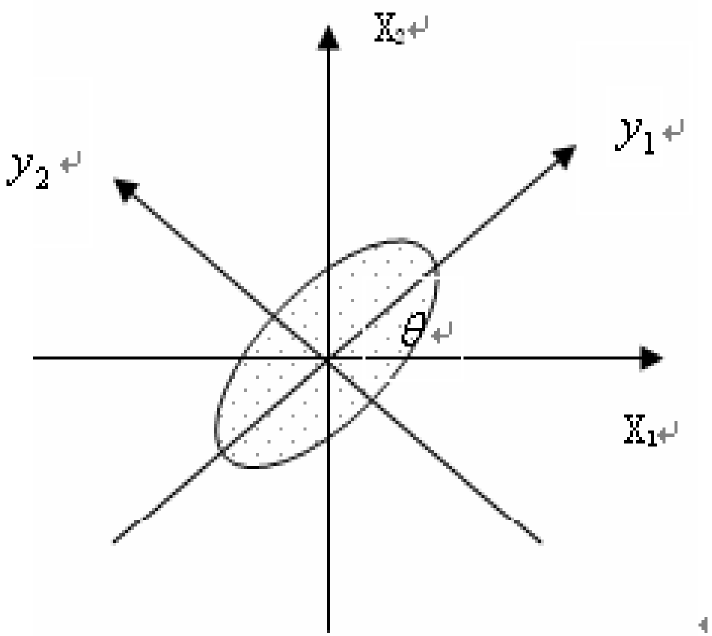


图 7.1　主成分几何解释图

将坐标系进行正交旋转一个角度 θ，使其椭圆长轴方向取坐标 y_1，在椭圆短轴方向取坐标 y_2，旋转公式为

$$\begin{cases} y_{1j} = x_{1j}\cos\theta + x_{2j}\sin\theta \\ y_{2j} = x_{1j}(-\sin\theta) + x_{2j}\cos\theta \end{cases}$$

$$j = 1,2\cdots n$$

写成矩阵形式为：$Y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \end{bmatrix} = U \cdot X$$

其中 U 为坐标旋转变换矩阵，它是正交矩阵，即有 $U' = U^{-1}, UU' = I$，即满足 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$。

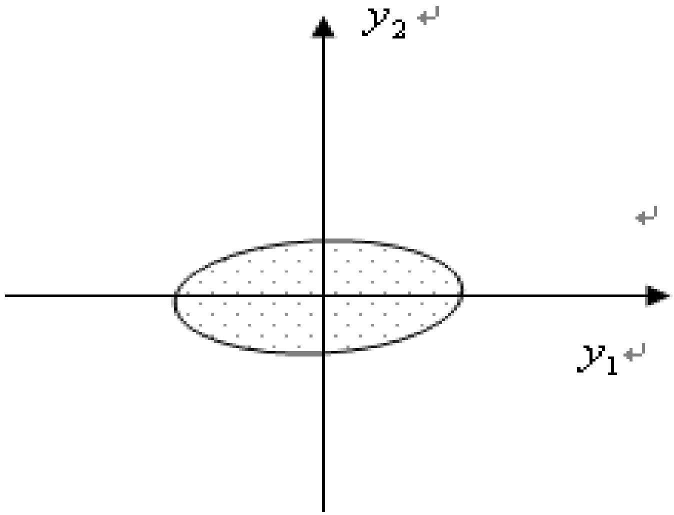


图 7.2　主成分几何解释图

新坐标 $y_1 - y_2$ 有如下性质：

(1) n 个点的坐标 y_1 和 y_2 的相关几乎为零。

(2) 二维平面上的 n 个点的方差大部分都归结为 y_1 轴上，而 y_2 轴上的方差较小。

y_1 和 y_2 称为原始变量 x_1 和 x_2 的综合变量。由于 n 个点在 y_1 轴上的方差最大，因而将二维空间的点用在 y_1 轴上的一维综合变量来代替，所损失的信息量最小，由此称 y_1 轴为第一主成分，y_2 轴与 y_1 轴正交，有较小的方差，称它为第二主成分。

3、计算步骤

（一）样本数据标准化处理

标准差标准化法，即

$$x'_{ij} = \frac{x_{ij} - \bar{x}_j}{s_j} \qquad (i = 1,2,\cdots,m;\ j = 1,2,\cdots,n)$$

由这种标准化方法所得到的新数据，各要素的平均值为**0**，标准差为**1**，即有

$$\bar{x}_j = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x'_{ij} = 0 \qquad\qquad s_j = \sqrt{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(x'_{ij} - \bar{x}'_j)^2} = 1$$

3、计算步骤

（二）计算相关系数矩阵

$$R=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1p} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{p1} & r_{p2} & \cdots & r_{pp} \end{bmatrix} \qquad (3.5.3)$$

r_{ij}（i，j=1，2，…，p）为原变量x_i与x_j的相关系数，$r_{ij}=r_{ji}$, 其计算公式为：

$$r_{ij}=\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_{ki}-\bar{x}_i)(x_{kj}-\bar{x}_j)}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_{ki}-\bar{x}_i)^2\sum_{k=1}^{n}(x_{kj}-\bar{x}_j)^2}} \qquad (3.5.4)$$

（三）计算特征值与特征向量：

① 解特征方程 $|\lambda I - R| = 0$ ，常用雅可比法（Jacobi）求出特征值，并使其按大小顺序排列 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots, \geq \lambda_p \geq 0$；

② 分别求出对应于特征值 λ_i 的特征向量

$e_i (i = 1,2,\cdots, p)$ ，要求 $\|e_i\|$ =1，即 $\sum_{j=1}^{p} e_{ij} = 1$ ，

其中 e_{ij} 表示向量 e_i 的第 j 个分量。

③ 计算主成分贡献率及累计贡献率

▲贡献率：

$$\frac{\lambda_i}{\sum_{k=1}^{p}\lambda_k} \qquad (i = 1,2,\cdots,p)$$

▲累计贡献率：

$$\frac{\sum_{k=1}^{i}\lambda_k}{\sum_{k=1}^{p}\lambda_k} \qquad (i = 1,2,\cdots,p)$$

一般取累计贡献率达85—95%的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 所对应的第一、第二、…、第m（m≤p）个主成分。

④ 计算主成分载荷

$$l_{ij} = p(z_i, x_j) = \sqrt{\lambda_i} e_{ij} (i, j = 1,2,\cdots, p) \quad （3.5.5）$$

⑤ 各主成分的得分：

$$Z = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1m} \\ z_{21} & z_{22} & \cdots & z_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z_{n1} & z_{n2} & \cdots & z_{nm} \end{bmatrix} \quad （3.5.6）$$

4、 主成分分析方法应用实例

下面，我们根据表3.4.5给出的数据，对某农业生态经济系统做主成分分析，

表3.4.5 某农业生态经济系统各区域单元的有关数据

样本序号	x_1：人口密度(人/km^2)	x_2：人均耕地面积(ha)	x_3：森林覆盖率(%)	x_4：农民人均纯收入(元/人)	x_5：人均粮食产量(kg/人)	x_6：经济作物占农作物播面比例(%)	x_7：耕地占土地面积比率(%)	x_8：果园与林地面积之比(%)	x_9：灌溉田占耕地面积之比(%)
1	363.912	0.352	16.101	192.11	295.34	26.724	18.492	2.231	26.262
2	141.503	1.684	24.301	1752.35	452.26	32.314	14.464	1.455	27.066
3	100.695	1.067	65.601	1181.54	270.12	18.266	0.162	7.474	12.489
4	143.739	1.336	33.205	1436.12	354.26	17.486	11.805	1.892	17.534
5	131.412	1.623	16.607	1405.09	586.59	40.683	14.401	0.303	22.932

6	68.337	2.032	76.204	1540.29	216.39	8.128	4.065	0.011	4.861
7	95.416	0.801	71.106	926.35	291.52	8.135	4.063	0.012	4.862
8	62.901	1.652	73.307	1501.24	225.25	18.352	2.645	0.034	3.201
9	86.624	0.841	68.904	897.36	196.37	16.861	5.176	0.055	6.167
10	91.394	0.812	66.502	911.24	226.51	18.279	5.643	0.076	4.477
11	76.912	0.858	50.302	103.52	217.09	19.793	4.881	0.001	6.165
12	51.274	1.041	64.609	968.33	181.38	4.005	4.066	0.015	5.402
13	68.831	0.836	62.804	957.14	194.04	9.11	4.484	0.002	5.79
14	77.301	0.623	60.102	824.37	188.09	19.409	5.721	5.055	8.413
15	76.948	1.022	68.001	1255.42	211.55	11.102	3.133	0.01	3.425
16	99.265	0.654	60.702	1251.03	220.91	4.383	4.615	0.011	5.593
17	118.505	0.661	63.304	1246.47	242.16	10.706	6.053	0.154	8.701
18	141.473	0.737	54.206	814.21	193.46	11.419	6.442	0.012	12.945
19	137.761	0.598	55.901	1124.05	228.44	9.521	7.881	0.069	12.654
20	117.612	1.245	54.503	805.67	175.23	18.106	5.789	0.048	8.461
21	122.781	0.731	49.102	1313.11	236.29	26.724	7.162	0.092	10.078

步骤如下：（1）将表3.4.5中的数据作标准差标准化处理，然后将它们代入公式（3.5.4）计算相关系数矩阵（见表3.5.1）。

表3. 5. 1　相关系数矩阵

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
x_1	1	-0.327	-0.714	-0.336	0.309	0.408	0.79	0.156	0.744
x_2	-0.33	1	-0.035	0.644	0.42	0.255	0.009	-0.078	0.094
x_3	-0.71	-0.035	1	0.07	-0.74	-0.755	-0.93	-0.109	-0.924
x_4	-0.34	0.644	0.07	1	0.383	0.069	-0.05	-0.031	0.073
x_5	0.309	0.42	-0.74	0.383	1	0.734	0.672	0.098	0.747
x_6	0.408	0.255	-0.755	0.069	0.734	1	0.658	0.222	0.707
x_7	0.79	0.009	-0.93	-0.046	0.672	0.658	1	-0.03	0.89
x_8	0.156	-0.078	-0.109	-0.031	0.098	0.222	-0.03	1	0.29
x_9	0.744	0.094	-0.924	0.073	0.747	0.707	0.89	0.29	1

（2）由相关系数矩阵计算特征值，以及各个主成分的贡献率与累计贡献率（见表3.5.2）。由表3.5.2可知，第一，第二，第三主成分的累计贡献率已高达86.596%（大于85%），故只需要求出第一、第二、第三主成分z_1，z_2，z_3即可。

表3.5.2　特征值及主成分贡献率

主成分	特征值	贡献率(%)	累积贡献率(%)
z_1	4.661	51.791	51.791
z_2	2.089	23.216	75.007
z_3	1.043	11.589	86.596
z_4	0.507	5.638	92.234
z_5	0.315	3.502	95.736
z_6	0.193	2.14	97.876
z_7	0.114	1.271	99.147
z_8	0.0453	0.504	99.65
z_9	0.0315	0.35	100

（3）对于特征值=4.6610，=2.0890，=1.0430分别求出其特征向量e_1，e_2，e_3，再用公式（3.5.5）计算各变量x_1，x_2，…，x_9在主成分z_1，z_2，z_3上的载荷（表3.5.3）。

表3.5.3　主成分载荷

	z_1	z_2	z_3	占方差的百分数（%）
x_1	0.739	-0.532	-0.0061	82.918
x_2	0.123	0.887	-0.0028	80.191
x_3	-0.964	0.0096	0.0095	92.948
x_4	0.0042	0.868	0.0037	75.346
x_5	0.813	0.444	-0.0011	85.811
x_6	0.819	0.179	0.125	71.843
x_7	0.933	-0.133	-0.251	95.118
x_8	0.197	-0.1	0.97	98.971
x_9	0.964	-0.0025	0.0092	92.939

上述计算过程，可以借助于SPSS或MATLAB软件系统实现。

分析：

①第一主成分z_1与x_1，x_5，x_6，x_7，x_9呈显出较强的正相关，与x_3呈显出较强的负相关，而这几个变量则综合反映了生态经济结构状况，因此可以认为第一主成分z_1是生态经济结构的代表。

②第二主成分z_2与x_2，x_4，x_5呈显出较强的正相关，与x_1呈显出较强的负相关，其中，除了x_1为人口总数外，x_2，x_4，x_5都反映了人均占有资源量的情况，因此可以认为第二主成分z_2代表了人均资源量。

③第三主成分z_3，与x_8呈显出的正相关程度最高，其次是x_6，而与x_7呈负相关，因此可以认为第三主成分在一定程度上代表了农业经济结构。

④另外，表3.5.3中最后一列（占方差的百分数），在一定程度反映了三个主成分z_1、z_2、z_3包含原变量（x_1，x_2，…，x_9）的信息量多少。

显然，用三个主成分z_1、z_2、z_3代替原来9个变量（x_1，x_2，…，x_9），描述农业生态经济系统，可以使问题更进一步简化、明了。